

Generalizaciones del Teorema de Schur-Horn en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Ana Lucía Rivera

1. Introducción

La motivación principal de este trabajo es estudiar las extensiones del Teorema de Schur-Horn (de análisis matricial) a espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ separables de dimensión infinita. En su versión matricial, este teorema describe condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir $p, \lambda \in \mathbb{R}^n$, para que exista una matriz autoadjunta de dimensión n que tiene a p como su diagonal principal y a λ por sus autovalores.

Ahora, sea β la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y sea E_β la función que asigna a un operador, que tiene por matriz de representación en la base β a A , el operador, que tiene por representación en la misma base a una matriz diagonal, con la misma diagonal principal que A . Entonces por el Teorema de Schur-Horn podemos describir para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, con $A = A^*$

$$E_\beta\left(\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)\}\right),$$

donde $\mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathbb{C}^n$. Es decir, podemos describir todas las diagonales que puede tener el operador autoadjunto A en sus diferentes representaciones matriciales. Más aún, la descripción de este conjunto depende de una cantidad finita de desigualdades.

El propósito de generalizar el Teorema de Schur-Horn a espacios de Hilbert separables de dimensión infinita, es poder caracterizar para un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con $A = A^*$

$$(1) \quad E_\beta\left(\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}\right),$$

donde E_β se define de manera análoga al caso finito dimensional, con respecto a una base ortonormal β del espacio de Hilbert (separable y complejo) $\mathcal{H}$ y $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

En el año 1999, Neumann, consigue caracterizar para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con $A = A^*$

$$(2) \quad \overline{E\left(\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}\right)},$$

donde la clausura es en norma de operadores y $E = E_\beta$. Es decir, estudia el conjunto de diagonales aproximadas de las distintas representaciones matriciales de un operador autoadjunto. Tal descripción puede considerarse como una generalización de las desigualdades del Teorema de Schur-Horn. Sin embargo, en general (1) no es cerrado, por lo que lo obtenido por Neumann no alcanza para la caracterización buscada.

En 2006, Arveson y Kadison mejoran este resultado para los operadores A de tipo traza, obteniendo una descripción de

$$(3) \quad E\left(\overline{\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}}^{\|\cdot\|_1}\right)$$

donde $\|A\|_1 = \text{tr}|A|$. Es decir, logran estudiar las diagonales de los operadores $\mathcal{L}^1$ -aproximadamente unitariamente equivalentes a A . Notemos que para los operadores de tipo traza,

$$E\left(\overline{\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}}^{\|\cdot\|_1}\right) \subsetneq \overline{E\left(\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}\right)}.$$

De esta forma este resultado mejora el obtenido por Neumann, para este tipo de operadores.

En el año 2002, Kadison publica un trabajo en el que describe una condición (obstrucción) que debe cumplir una sucesión para ser la diagonal principal de un proyector ortogonal. Más aún, este trabajo caracteriza para $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con $P = P^2 = P^*$,

$$(4) \quad E\left(\{U^*PU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}\right).$$

A partir de la caracterización obtenida por Kadison puede verse que el conjunto (1) no es cerrado, incluso para proyectores.

En 2007, Arveson encuentra un contexto general en donde vale una generalización de la obstrucción de Kadison. Más concretamente, muestra una condición necesaria para que una sucesión de números complejos pueda ser la diagonal principal de un operador normal que tiene espectro X con multiplicidad uniformemente infinita.

Por todo lo dicho antes, para el desarrollo de nuestro trabajo decidimos estudiar los artículos de: Neumann [10]; Antezana, Massey, Ruiz y Stojanoff [1]; Arveson y Kadison [4]; Kadison [7],[8] y Arveson [3].

A continuación, describimos el contenido del trabajo por secciones. En la sección 2, damos los preliminares necesarios para el desarrollo y entendimiento del trabajo. Los mismos fueron divididos en una subsección dedicada a mayorización, en la cual se define este concepto por medio de las siguientes desigualdades: para $x, y \in \mathbb{R}^n$ ordenados de manera decreciente, $x \preceq y$ si para todo $1 \leq k < n$,

$$(5) \quad \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$

se presenta y se demuestra el Teorema de Schur-Horn clásico y además se exhiben una serie de equivalencias de este teorema; una segunda subsección dedicada a propiedades y definiciones conocidas del Análisis funcional; una tercer subsección en donde se desarrollan propiedades de operadores compactos; y por último, una subsección en donde se demuestra el teorema de Weyl-von Neumann, resultado que será usado en la sección 4.

En la sección 3, donde desarrollamos el trabajo [10], obtenemos una versión del Teorema de Schur-Horn para operadores diagonales en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (Teorema 3.37). Para llegar a este resultado, empezamos estudiando algunas propiedades de sucesiones en los diferentes espacios ℓ^p con $1 \leq p \leq \infty$. Para ello definimos los funcionales L_k de la siguiente manera: para $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ y $k \in \mathbb{N}$, $L_k(a) = \sup_{E \in \mathcal{C}_k} \sum_{j \in E} a_j$ donde $\mathcal{C}_k$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de orden

k . Estos funcionales nos permiten sustituir las desigualdades de la mayorización, obteniendo relaciones entre los elementos que pertenecen a la cápsula convexa de las permutaciones de un elemento dado y este mismo.

El trabajo de Neumann se desarrolla en términos de sucesiones, pero luego se reformula en términos de operadores diagonales (Teorema 3.37), con lo que logramos caracterizar (2). Para el caso de operadores no diagonalizables, hemos seguido la línea propuesta en el artículo [1], y que desarrollamos en la Sección 4. En la misma, mediante una extensión natural de los funcionales L_k a operadores, llevamos el caso no diagonalizable al caso diagonalizable vía el Teorema de Weyl-von Neumann, de donde deducimos que si S es autoadjunto, existe D diagonal, que es

aproximadamente unitariamente equivalente a S . Con este resultado, obtenemos el caso general del Teorema de Schur-Horn en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (Teorema 4.10).

Luego, en la sección 5 desarrollamos parte del trabajo [4]. En la misma estudiamos la órbita unitaria de los operadores de tipo traza y una noción de $\mathcal{L}^1$ -equivalencias unitarias. A través de este estudio, obtenemos una versión del Teorema de Schur-Horn para el caso de operadores de tipo traza que actúan sobre $\mathcal{H}$, es decir, en $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. En particular el Teorema de Schur-Horn caracteriza $E(\vartheta_\lambda)$, donde ϑ_λ es el conjunto de operadores de tipo traza que tienen a λ como su lista de autovalores (Teorema 5.3).

En la sección 6 presentamos dos teoremas de los artículos [7] y [8]. El resultado principal de esta sección nos proporciona una caracterización, con condiciones necesarias y suficientes, para que una sucesión $a = (a_k)_{k \geq 1} \subseteq [0, 1]$ sea la diagonal principal de alguna proyección ortogonal F (Teorema 6.2) y damos un ejemplo que una sucesión que no puede ser diagonal principal de ningún proyector.

Este teorema es analizado luego en la sección 7, donde desarrollamos el trabajo [3]. En la misma, estudiamos una obstrucción para que ciertas sucesiones puedan ser la diagonal principal de algún operador normal A , actuando sobre $\mathcal{H}$ (espacio de Hilbert separable), con espectro $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{C}$ con multiplicidad uniformemente infinita. Es decir, caracterizamos las diagonales principales de los operadores en $\mathcal{N}(X)$, donde $\mathcal{N}(X) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) / A^*A = AA^*, \sigma(A) = \sigma_e(A) = X\}$. Más aún, para el caso en que X sea el conjunto de vértices de un polígono convexo con solo dos elementos, las condiciones encontradas son necesarias y suficientes.

Índice

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Mayorización	5
2.2. Propiedades y definiciones elementales	13
2.3. Propiedades de operadores compactos	16
2.4. Teorema de Weyl-von Neumann.	19
3. Diagonales aproximadas de operadores acotados. Caso diagonalizable	26
3.1. El Teorema de Schur-Horn en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Caso diagonalizable.	46
4. Diagonales aproximadas de operadores acotados. Caso general.	52
5. Diagonales de la clausura en norma 1 de órbitas unitarias.	57
5.1. Clausuras de órbitas unitarias en $\mathcal{L}^1$	57
5.2. Diagonales de operadores de tipo traza.	58
6. Diagonales de proyecciones	65
7. El índice de obstrucción de Arveson	76
7.1. Sucesiones en $\text{Lim}^1(X)$ y el grupo Γ_X	77
7.2. X -descomposición	79
7.3. Dos proyecciones.	82
7.4. Proyecciones con diagonal en $\text{Lim}^1(\{0, 1\})$	84
7.5. Diagonales de operadores en $\mathcal{N}(X)$	85
7.6. Conclusión, observaciones y un ejemplo.	88

2. Preliminares

2.1. Mayorización

En esta sección exponemos las nociones básicas para el entendimiento del Teorema de Schur-Horn. Además, una vez obtenido éste, veremos algunas equivalencias que nos serán útiles para el desarrollo del trabajo.

Parte de las definiciones y resultados aquí desarrollados fueron estudiados en la materia Análisis Matricial. Usamos como bibliografía los textos [2] y [5]. Hemos incluido además resultados de los artículos [4] y [7].

Notaciones: Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, escribiremos $\text{tr}(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $x^\downarrow \in \mathbb{R}^n$ al vector obtenido de x reordenando las coordenadas de x en forma decreciente.

Definición 2.1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se dice que x está mayorizado por y , y se nota $x \preceq y$ si se verifica que:

$$1- \sum_{j=1}^k x_j^\downarrow \leq \sum_{j=1}^k y_j^\downarrow, \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$2- \text{tr}(x) = \text{tr}(y).$$

Si solo se cumple la condición 1-, decimos que x está submayorizado por y y lo denotamos por $x \prec y$.

Observación 2.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, tales que $\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k y_i$ para $1 \leq k \leq n$. Entonces $x \preceq y$

pues como $\sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow$, tenemos que $\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow$ para todo $1 \leq k \leq n$. Es decir, a efectos de probar la mayorización, no hace falta que el vector que mayoriza esté ordenado en forma decreciente, sino que basta que cumpla las desigualdades anteriores, para $1 \leq k \leq n$.

Notación: Denotaremos por $M_n = M_n(\mathbb{C})$ al conjunto de todas las matrices cuadradas de dimensión n sobre $\mathbb{C}^n$ y $M_n^{sa} = M_n^{sa}(\mathbb{C})$ las que además sean autoadjuntas. Más adelante, si las matrices son de dimensión infinita, las notaremos $M_{\mathbb{N}} = M_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$.

Sea $A \in M_n$, llamaremos $F_i(A)$ a la i -ésima fila de A y $C_j(A)$ a la columna j -ésima.

Introducimos las matrices doble estocásticas, las cuales nos darán una descripción alternativa de la mayorización.

Definición 2.3. Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n$ se llama doble estocástica si $a_{ij} \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, y

$$\begin{aligned} \text{tr}(F_i(A)) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, & \text{para todo } i; \\ \text{tr}(C_j(A)) &= \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, & \text{para todo } j. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Si $x \in \mathbb{R}^n$, cumple que $x_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, entonces

$$\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \preceq (x_1, \dots, x_n) \preceq (1, 0, \dots, 0).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_1, \dots, x_n)$ está ordenado de manera decreciente. Para la probar la primera mayorización supongamos que está no pasa, es decir que $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \not\preceq (x_1, \dots, x_n)$. Como $\text{tr}\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = 1 = \text{tr}(x_1, \dots, x_n)$, entonces tenemos que suponer que para algún k en $\{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^k \frac{1}{n} > \sum_{i=1}^k x_k$. Entonces

$$\frac{k}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} > \sum_{i=1}^k x_k \geq k \left(\min_{1 \leq i \leq k} x_i \right) = kx_k,$$

de donde $\frac{1}{n} > x_k$ y entonces, $\frac{1}{n} > x_i$ para todo $k \leq i \leq n$. Con todo esto, llegamos a que

$$\text{tr}(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + \dots + x_n < \frac{k}{n} + (n-k)\frac{1}{n} = 1,$$

lo cual es absurdo, pues $\text{tr}(x_1, \dots, x_n) = 1$. La segunda mayorización es trivial, pues $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

con lo que $x_1 \leq 1$ y $\sum_{i=1}^k x_i \leq 1$ para $1 \leq k \leq n-1$.

■

Definición 2.5. Una función lineal $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ se dice que preserva traza si $\text{tr}(Ax) = \text{tr}(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Observación 2.6. $A = (a_{ij}) \in M_n$ es doble estocástica si y solo si $a_{ij} \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, $Ae = e$ y $A^t e = e$ donde $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. En efecto, notemos que $(Ae)_i = \text{tr}(F_i(A))$ y $(A^t e)_i = \text{tr}(C_i(A))$.

Definimos $\mathbb{S}_n$ como el grupo de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ con la composición. Consideramos $\mathbb{S}_n$ actuando sobre $\mathbb{R}^n$ permutando las entradas, es decir: si $\tau \in \mathbb{S}_n$ y $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces $(\tau \cdot a)_i = a_{\tau(i)}$ para $1 \leq i \leq n$.

Definición 2.7. Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n$ es una matriz de permutación si existe $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tal que $a_{ij} = \delta_{\sigma(i)j}$, donde δ_{ij} es el Delta de Kronecker. En este caso notamos $A = P_\sigma$. Es sencillo ver que si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $P_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (\sigma \cdot x)$.

Observación 2.8. Las matrices de permutación, son doble estocásticas.

Observación 2.9. Sean $A, B \in M_n$ doble estocásticas, entonces:

- i) AB es doble estocástica.
- ii) $\lambda A + (1 - \lambda)B$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ es doble estocástica.

Demostración: Sean $A, B \in M_n$ y $AB = ((AB)_{ij}) \in M_n$.

i) Por ser A, B doble estocásticas, tenemos por la Observación 2.6,

$$ABe = Ae = e, \quad (AB)^t e = B^t A^t e = B^t e = e, \quad y \quad (AB)_{ij} \geq 0$$

para $1 \leq i, j \leq n$ (por ser suma y producto de componentes positivas). Por lo tanto, por la misma Observación, AB es doble estocástica.

ii) De manera similar,

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)e = \lambda Ae + (1 - \lambda)Be = \lambda e + (1 - \lambda)e = e,$$

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)^t e = (\lambda A^t + (1 - \lambda)B^t)e = \lambda A^t e + (1 - \lambda)B^t e = \lambda e + (1 - \lambda)e = e$$

y $(\lambda A + (1 - \lambda)B)_{ij} \geq 0$, (por ser combinación convexa de componentes positivas). Por lo tanto, $\lambda A + (1 - \lambda)B$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ es doble estocástica. ■

Teorema 2.10. Una matriz $A \in M_n$ es doble estocástica si y solo si $Ax \preceq x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: $\Leftarrow$) Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Entonces como $Ae_i \preceq e_i$ para $1 \leq i \leq n$, deducimos que, para todo $1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq a_{ij} \leq 1$ y

$$1 = \text{tr}(e_i) = \text{tr}(Ae_i) = \text{tr}(C_i(A)).$$

Por otra parte, tomemos $e = (1, \dots, 1)$. Por la Observación 2.4, como $Ae \preceq e$ y todas las coordenadas de e son 1, deducimos que

$$e = Ae = \left(\text{tr}(F_1(A)), \dots, \text{tr}(F_n(A)) \right).$$

de donde A es doble estocástica.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que A es doble estocástica y llamemos $y = Ax$. Queremos probar que $y \preceq x$. Podemos suponer que las coordenadas de x y de y están ordenadas en forma decreciente, puesto que si P, Q son matrices de permutación, entonces QAP es doble estocástica, por la Observación 2.9. Además, como $y = Ax$ para $1 \leq k \leq n$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^k y_j = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k a_{ji} \right) x_i.$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

Fijamos $k \in \{1, \dots, n\}$. Si para cada i llamamos $t_i = \sum_{j=1}^k a_{ji}$, entonces $0 \leq t_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^n t_i = k$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k y_j - \sum_{j=1}^k x_j &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i - \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^n t_i x_i - \sum_{i=1}^k x_i \\
&= \sum_{i=1}^n t_i x_i - \sum_{i=1}^k x_i + \left(k - \sum_{i=1}^n t_i\right) x_k \\
&= \sum_{i=1}^k t_i x_i + \sum_{i=k+1}^n t_i x_i - \sum_{i=1}^k x_i + k x_k - \sum_{i=1}^k t_i x_k - \sum_{i=k+1}^n t_i x_k \\
&= \sum_{i=1}^k (t_i - 1) x_i + \sum_{i=1}^k x_k - \sum_{i=1}^k t_i x_k + \sum_{i=k+1}^n t_i (x_i - x_k) \\
&= \sum_{i=1}^k (t_i - 1) x_i + \sum_{i=1}^k (1 - t_i) x_k + \sum_{i=k+1}^n t_i (x_i - x_k) \\
&= \sum_{i=1}^k (t_i - 1) (x_i - x_k) + \sum_{i=k+1}^n t_i (x_i - x_k) \leq 0,
\end{aligned}$$

pues los dos términos de la última igualdad son sumas de términos no positivos. Por lo tanto, $\sum_{j=1}^k y_j \leq \sum_{j=1}^k x_j$ para $1 \leq k \leq n$ y además, cuando $k = n$, obtenemos la igualdad por el hecho de que A es doble estocástica. Así obtenemos, $Ax = y \preceq x$. ■

Definición 2.11. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sea $X \subset \mathbb{V}$ un subconjunto. Denotamos por $\text{conv}(X)$ a la cápsula convexa de X en $\mathbb{V}$, es decir, el conjunto formado por todas las combinaciones convexas de elementos de X .

Definición 2.12. Sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ un punto de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$K_{\mathbf{a}} = \text{conv}\left\{(\tau \cdot \mathbf{a}) = (a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)}), \tau \in \mathbb{S}_n\right\}.$$

Llamaremos $K_{\mathbf{a}}$ al politopo generado por las permutaciones de $\mathbf{a}$.

Teorema 2.13. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$.
- ii) $\mathbf{y} \in K_{\mathbf{x}}$.
- iii) Existe $A \in M_n$ doble estocástica tal que $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.
- iv) Existen puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in K_{\mathbf{x}}$ tales que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}$ y

$$\mathbf{x}_{k+1} = t_k \mathbf{x}_k + (1 - t_k)(\tau_k \cdot \mathbf{x}_k)$$

donde τ_k es alguna transposición en $\mathbb{S}_n$ y $t_k \in [0, 1]$, para cada k en $\{1, \dots, n-1\}$.

Demostración: ii) $\Rightarrow$ iii) Como $\mathbf{y} \in K_{\mathbf{x}}$, tenemos que $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\sigma_i \cdot \mathbf{x})$, donde $\sigma_i \in \mathbb{S}_n$, y

por la Definición 2.7 $(\sigma_i \cdot \mathbf{x}) = P_{\sigma_i} \mathbf{x}$, con $P_{\sigma_i} \in M_n$ matriz de permutación. Luego,

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \right) \mathbf{x} = A\mathbf{x}.$$

Así, recordando que las matrices de permutación son doble estocásticas, y por la Observación 2.9 las combinaciones convexas de ellas también lo son, A es doble estocástica. Es decir, existe $A \in M_n$ doble estocástica tal que $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

iii) $\Rightarrow$ i) Sale por el Teorema 2.10.

i) $\Rightarrow$ ii) y iv). La haremos por inducción sobre la dimensión de n . Para $n = 1$ es trivial.

Para $n = 2$, supongamos que $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \preceq (x_1, x_2) = \mathbf{x}$, con $y_1 \geq y_2$ y $x_1 \geq x_2$. Entonces

$$x_2 \leq y_2 \leq y_1 \leq x_1 \quad \text{y} \quad y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

Sea $t \geq 0$ tal que $y_1 = tx_1 + (1-t)x_2$. Entonces,

$$y_2 = y_1 + y_2 - y_1 = x_1 + x_2 - y_1 = x_1 + x_2 - (tx_1 + (1-t)x_2) = (1-t)x_1 + tx_2.$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) = t(x_1, x_2) + (1-t)(x_2, x_1) = t\mathbf{x} + (1-t)\tau(\mathbf{x}),$$

donde $\tau \in \mathbb{S}_2$. Entonces $\mathbf{y} \in K_{\mathbf{x}}$ (por lo que vale ii)) y además, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2$ (por lo que vale iv)).

Sea $n > 2$. Supongamos que la hipótesis vale para $n-1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los vectores están ordenados en forma decreciente. Luego, $x_n \leq y_n \leq y_1 \leq x_1$. Sea $k > 1$ tal que $x_k \leq y_1 \leq x_{k-1}$ y $0 \leq t \leq 1$ tal que $y_1 = tx_1 + (1-t)x_k$. Sea τ_0 la permutación $(1, k)$. Definamos $\mathbf{z} = t\mathbf{x} + (1-t)(\tau_0 \cdot \mathbf{x})$, entonces $z_1 = y_1$.

Sean $\mathbf{y}' = (y_2, \dots, y_n)$ y $\mathbf{z}' = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Vamos a probar que $\mathbf{y}' \preceq \mathbf{z}'$: Como $z_1 = y_1$ y $\text{tr}(\mathbf{z}) = \text{tr}(\mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{y})$, tenemos que $\text{tr}(\mathbf{z}') = \text{tr}(\mathbf{z}) - y_1$ y $\text{tr}(\mathbf{y}') = \text{tr}(\mathbf{y}) - y_1$, entonces $\text{tr}(\mathbf{y}') = \text{tr}(\mathbf{z}')$. Si $m \leq k-1$, entonces, como $y_1 \leq x_{k-1}$,

$$\sum_{i=2}^m z_i = \sum_{i=2}^m x_i \geq (m-1)x_{k-1} \geq (m-1)y_1 \geq \sum_{i=2}^m y_i.$$

Por otro lado, si $m \geq k$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^m z_i &= \sum_{i=2}^{k-1} x_i + (1-t)x_1 + tx_k + \sum_{i=k+1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i - tx_1 - (1-t)x_k \\ &= \sum_{i=1}^m x_i - y_1 \geq \sum_{i=1}^m y_i - y_1 = \sum_{i=2}^m y_i. \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{y}' \preceq \mathbf{z}'$. Entonces, por hipótesis inductiva, para $1 \leq i \leq n-1$, existen $\mu_i \in [0, 1]$ con

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = 1 \text{ y } \sigma_i \in \mathbb{S}_{n-1} \text{ tales que } \mathbf{y}' = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\sigma_i \cdot \mathbf{z}').$$

Ahora, para cada σ_i , definimos $\tilde{\sigma}_i$ por :

$$\tilde{\sigma}_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ \sigma_i(j) + 1 & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

(es decir, $\tilde{\sigma}_i$ permuta las coordenadas $\{2, \dots, n\}$). Si llamamos también $\tilde{\sigma}_i$ a la extensión de la permutación $\tilde{\sigma}_i$ a $\mathbb{S}_n$ dejando $\tilde{\sigma}_i(1) = 1$ (es decir, es la misma permutación, solo que ahora vista

en $\mathbb{S}_n$) y como $z_1 = y_1$, tenemos que $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\tau_{\tilde{\sigma}_i} \cdot \mathbf{z})$. Pero entonces,

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (\tau_{\tilde{\sigma}_i} \cdot (t\mathbf{x} + (1-t)(\tau_0 \cdot \mathbf{x}))) = \sum_{i=1}^{n-1} t\mu_i (\tau_{\tilde{\sigma}_i} \cdot \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n-1} (1-t)\mu_i (\tau_{\tilde{\sigma}_i} \cdot (\tau_0 \cdot \mathbf{x})),$$

que es una combinación convexa de permutaciones de $\mathbf{x}$, es decir, $\mathbf{y} \in K_{\mathbf{x}}$ (por lo que vale *ii*)).

Para *iv*), por hipótesis inductiva, existen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ de dimensión $n-1$ tales que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{y}$ y $\mathbf{x}_{k+1} = t_k \mathbf{x}_k + (1-t_k)(\tau_k \cdot \mathbf{x}_k)$ para cada k en $\{1, \dots, n-2\}$, alguna transposición $\tau_k \in \mathbb{S}_{n-1}$ y algún $t_k \in [0, 1]$. Como $\mathbf{y}', \mathbf{z}'$ tienen ambos dimensión $n-1$, tomamos $\mathbf{z}' = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}' = \mathbf{x}_n$. Luego con la misma extensión $\tilde{\tau}_k \in \mathbb{S}_n$ (es decir, la que deja la primer coordenada fija), y tomando $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, tendremos los $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de dimensión n (todos con la primer coordenada y_1) tales que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}$ y $\mathbf{x}_{k+1} = t_k \mathbf{x}_k + (1-t_k)(\tilde{\tau}_k \cdot \mathbf{x}_k)$ para cada k en $\{1, \dots, n-1\}$, alguna transposición $\tilde{\tau}_k \in \mathbb{S}_n$ y algún $t_k \in [0, 1]$ y así *iv*) vale.

iv) $\Rightarrow$ *ii*) Como $(\tau \cdot \mathbf{d}) \in \mathbb{S}_n(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{d} \in \mathbb{S}_n(\mathbf{x})$, entonces $(\tau \cdot \mathbf{c}) \in K_{\mathbf{x}}$ cuando $\mathbf{c} \in K_{\mathbf{x}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x} \in K_{\mathbf{x}}, & \mathbf{x}_2 &= t\mathbf{x}_1 + (1-t)(\tau \cdot \mathbf{x}_1) \in K_{\mathbf{x}}, \dots, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x}_n = t'\mathbf{x}_{n-1} + (1-t')(\tau' \cdot \mathbf{x}_{n-1}) \in K_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

■

Definición 2.14. Dada $A = (a_{ij}) \in M_n^{sa}$, $\lambda(A)$ denota la n -upla de autovalores de A contando multiplicidad y ordenados de forma decreciente. Tal sucesión se llama lista de autovalores.

Definición 2.15. Llamaremos $p : M_n^{sa} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la proyección que da la diagonal principal de A :

$$p(A) = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 2.16 (Teorema de Schur). *Si existe una matriz $A \in M_n^{sa}$ que tiene por autovalores a $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y por diagonal principal a $p = (p_1, \dots, p_n)$, ambos escritos en orden decreciente, entonces $p \preceq \lambda$.*

Se demuestra usando que $A = U^* \text{diag}(\lambda) U$ donde $U \in \mathcal{U}(n)$, $\text{diag}(\lambda)$ es la matriz diagonal que tiene como diagonal principal a λ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i |u_{i1}|^2 & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{i1} u_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{in} u_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i |u_{in}|^2 \end{bmatrix}. \\ \text{Entonces } p(A) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i |u_{i1}|^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i |u_{in}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |u_{11}|^2 & \dots & |u_{n1}|^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |u_{1n}|^2 & \dots & |u_{nn}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = D\lambda \text{ con } D \text{ doble} \end{aligned}$$

estocástica (por ser U unitaria) y por el Teorema 2.13, $p \preceq \lambda$ (ya que $p = p(A)$).

La recíproca fue probada por Alfred Horn en el trabajo publicado en 1954. De esta forma, obtenemos el siguiente resultado, que es el principal de esta subsección.

Teorema 2.17 (Teorema de Schur-Horn). *Sean $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $p \preceq \lambda$ si y solo si existe $A \in M_n^{sa}$ con autovalores λ cuya diagonal principal es p .*

Demostración: Sean $p = (p_1, \dots, p_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ordenados de manera decreciente tales $p \preceq \lambda$. Por el Teorema 2.13 (donde $p = \mathbf{y}$, $\lambda = \mathbf{x}$), existen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1 = \lambda$, $x_n = p$ y para cada $1 \leq k \leq n-1$, x_{k+1} puede ser expresado en términos de x_k de la siguiente manera:

$$(6) \quad x_{k+1} = t_k x_k + (1 - t_k)(\tau_k \cdot x_k)$$

donde t_k es un número en el intervalo unitario, τ_k es una transposición en $\mathbb{S}_n$ y $(\tau_k \cdot x)$ denota $(x_{\tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_k(n)}) \in \mathbb{R}^n$.

Ahora presentaremos una sucesión de matrices autoadjuntas $A_1, \dots, A_n$ tales que A_k tiene autovalores λ y x_k como diagonal principal. Las definimos de la siguiente manera: dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n^{sa}$ con $p(A) = x$, y dados un número $t \in [0, 1]$ y una transposición $\tau = (j, k)$ en $\mathbb{S}_n$, existe una matriz unitaria U tal que la diagonal de UAU^* es $tx + (1 - t)(\tau \cdot x)$. En efecto, sea $U \in M_n$ la matriz

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & z \cos(\theta) & & \sin(\theta) & \\ & & & \ddots & & \\ & & -z \sin(\theta) & & \cos(\theta) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ \\ k \\ \\ \end{matrix},$$

donde z es un complejo tal que $|z|^2 = 1$ y $\bar{z}a_{kj} = -za_{jk}$ y θ satisface que $\sin^2(\theta) = t$ (entonces $\cos^2(\theta) = 1 - t$). Como

$$\begin{aligned} (UAU^*)_{jj} &= |z|^2 a_{jj} \cos^2(\theta) + \bar{z}a_{kj} \sin(\theta) \cos(\theta) + za_{jk} \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{kk} \sin^2(\theta) \\ &= a_{jj} \cos^2(\theta) + a_{kk} \sin^2(\theta) = (1 - t)a_{jj} + ta_{kk}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (UAU^*)_{kk} &= |z|^2 a_{jj} \sin^2(\theta) - \bar{z}a_{kj} \cos(\theta) \sin(\theta) - za_{jk} \sin(\theta) \cos(\theta) + a_{kk} \cos^2(\theta) \\ &= a_{jj} \sin^2(\theta) + a_{kk} \cos^2(\theta) = a_{jj}t + a_{kk}(1 - t), \end{aligned}$$

tenemos que

$$(UAU^*)_{hh} = \begin{cases} (1 - t)a_{jj} + ta_{kk} & \text{si } h = j, \\ ta_{jj} + (1 - t)a_{kk} & \text{si } h = k, \\ a_{hh} & \text{si } h \neq j, k. \end{cases}$$

de donde

$$p(UAU^*) = (a_{11}, \dots, (1 - t)a_{jj} + ta_{kk}, \dots, ta_{jj} + (1 - t)a_{kk}, \dots, a_{nn}) = tx + (1 - t)(\tau \cdot x).$$

Ahora construimos las matrices $A_1, \dots, A_n$ por inducción: Sea A_1 la matriz diagonal que tiene a $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ como diagonal principal (tomaremos $x_1 = \lambda$). Supongamos que $A_1, \dots, A_k$ ya han sido definidas y satisfacen las condiciones, entonces el resultado anterior implica que existe una matriz unitaria U_k tal que

$$p(U_k A_k U_k^*) = t_k x_k + (1 - t_k)(\tau_k \cdot x_k).$$

Tomamos $A_{k+1} = U_k A_k U_k^*$ y continuamos inductivamente, obteniendo una sucesión de matrices $A_1, \dots, A_n$ cuyo último término $A_n = U_{n-1} \dots U_1 A_1 U_1^* \dots U_{n-1}^*$ es una matriz autoadjunta que tiene lista de autovalores λ y diagonal p . ■

Observación 2.18. El teorema anterior admite las siguientes reformulaciones:

1. Sea un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión n . Si A es un operador autoadjunto con lista de autovalores $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y sea $p = (p_1, \dots, p_n)$ tal que $p \preceq \lambda$, entonces existe una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathcal{H}$ tal que

$$\langle Ae_k, e_k \rangle = p_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

2. Dada una sucesión $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de números reales, sea

$$\vartheta_\lambda = \{A \in M_n^{sa} : \lambda = \lambda(A)\}.$$

Sea $K_\lambda = \text{conv}\{(\tau \cdot \lambda) \in \mathbb{R}^n : \tau \in \mathbb{S}_n\}$, o sea, el politopo generado por las permutaciones de λ . Entonces el conjunto de todas las diagonales principales de las matrices en ϑ_λ coincide con K_λ .

En efecto, por el Teorema 2.17 $p \in \mathbb{R}^n$ es la diagonal principal de alguna matriz $A \in \vartheta_\lambda$ si y solo si $p \preceq \lambda$. Por otro lado, la equivalencia de los ítems *i*) y *ii*) del Teorema 2.13 muestra que $p \preceq \lambda$ si y solo si $p \in K_\lambda$.

Notaciones: Llamaremos $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_m(n)$ a las proyecciones ortogonales de rango m en M_n y $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n)$ al conjunto de todas las proyecciones ortogonales en M_n . Llamaremos $\mathcal{K}_m$ al rango de p restringido al conjunto $\mathcal{P}_m$, donde $m \in \{0, \dots, n\}$ y $\mathcal{K}$ el rango de p restringido al conjunto $\mathcal{P}$.

Corolario 2.19. Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$a \in \mathcal{K}_m \text{ si y solo si } 0 \leq a_j \leq 1 \text{ para cada } j \text{ y } \sum_{j=1}^n a_j = m,$$

y

$$a \in \mathcal{K} \text{ si y solo si } 0 \leq a_j \leq 1 \text{ para cada } j \text{ y } \sum_{j=1}^n a_j \in \{0, \dots, n\}.$$

$$\text{Demostración: } \Rightarrow) \mathcal{K}_m \subseteq \left\{ b \in \mathbb{R}^n : b_i \in [0, 1] \text{ y } \sum_{i=1}^n b_i = m \right\}.$$

$$\Leftarrow) \text{ Sea } a = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m} \right). \text{ Si } b = (b_1, \dots, b_n) \text{ es tal que para cada } 1 \leq j \leq n \text{ tenemos}$$

que $b_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n b_j = m$, (podemos considerar que $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$) entonces tenemos que

$$\begin{aligned} b_1 &\leq 1, \quad b_1 + b_2 \leq 1 + 1, \quad \dots, \quad b_1 + \dots + b_m \leq m, \\ b_1 + \dots + b_{m+1} &\leq m + 0, \quad \dots, \quad b_1 + \dots + b_{n-1} \leq m, \end{aligned}$$

y por lo tanto, $b \preceq a$.

Entonces, por el Teorema 2.13 existe $A \in M_n^{sa}$ tal que $\lambda(A) = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m} \right)$ y $p(A) = b$.

Por lo tanto, $A = U^* \begin{bmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{bmatrix} U$, por lo que $A = A^2 = A^*$, es decir, $A \in \mathcal{P}_m$, con lo cual $b \in \mathcal{K}_m$.

En particular, $\mathcal{K}_m$ es convexo. Como $\mathcal{K} = \bigcup_{m=0}^n \mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}$ es como queríamos. ■

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente:

Teorema 2.20. Sean $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $p \preceq \lambda$.
- ii) $p \in K_\lambda$.
- iii) Existe $A \in M_n$ doble estocástica tal que $p = A\lambda$.
- iv) Existen puntos $x_1, \dots, x_n \in K_\lambda$ tales que $x_1 = \lambda$, $x_n = p$ y

$$x_{k+1} = t_k x_k + (1 - t_k)(\tau_k \cdot x_k)$$

para cada k en $\{1, \dots, n-1\}$, alguna transposición $\tau_k \in \mathbb{S}_n$ y algún $t_k \in [0, 1]$.

- v) Existe $A \in M_n^{sa}$ con autovalores λ y cuya diagonal principal es p .

2.2. Propiedades y definiciones elementales

Los mayoría de los contenidos de esta subsección y de la siguiente fueron desarrollados en las materias Análisis Funcional y Complementos de Análisis Funcional. Como bibliografía usamos [6] y [9]. El resto de los contenidos son del artículo [1]. De aquí en adelante, los espacios de Hilbert y las álgebras consideradas serán sobre el cuerpo de los números complejos.

Definiciones 2.21.

- Un álgebra de Banach es un álgebra normada compleja A que resulta completa como espacio métrico con la métrica usual y satisface $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todo $a, b \in A$.
- Sea A un álgebra de Banach unital y $a \in A$. Decimos que a es invertible en A si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = I \in A$.
- Definimos el espectro de a relativo a A como $\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - a) \notin \text{Inv}(A)\} \subseteq \mathbb{C}$.
- Una involución en una $\mathbb{C}$ -álgebra A es una operación $(\cdot)^* : A \rightarrow A$ tal que para todo $a, b \in A$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$:
 - i) $(a + \alpha b)^* = a^* + \bar{\alpha}b^*$
 - ii) $(ab)^* = b^*a^*$
 - iii) $(a^*)^* = a^{**} = a$.
- Una $*$ -álgebra de Banach es un álgebra de Banach con una involución $(\cdot)^*$ y tal que $\|a^*\| = \|a\|$ para toda $a \in A$. Si además $1 \in A$ y $\|1\| = 1$, entonces A es una $*$ -álgebra de Banach con unidad.
- Una C^* -álgebra A es una $*$ -álgebra de Banach tal que $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para toda $a \in A$.

Observación 2.22. Una $*$ -subálgebra cerrada de una C^* -álgebra de A es una C^* -álgebra.

Ejemplo 2.23. Si $\mathcal{H}$ es Hilbert, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con la conjugación por involución es una C^* -álgebra. Además, toda $*$ -subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una C^* -álgebra. En efecto,

$$\|a^*a\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle a^*ax, y \rangle| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle ax, ay \rangle| = \|a\|^2.$$

Proposición 2.24. Si A es una C^* -álgebra y $1 \in A$, entonces $\|1\| = 1$. Si p es proyector ortogonal, es decir si $p = p^2 = p^*$ entonces $\|p\| = 1$. Si $u \in A$ es unitario, es decir si $uu^* = u^*u = 1_A$, entonces $\|u\| = 1$ y $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$ (Si $u^*u = 1_A$ decimos que u es isometría. Si $uu^* = 1_A$, decimos que u es co-isometría).

Observación 2.25. En el presente trabajo, cuando hablamos de proyecciones, siempre nos referimos a proyecciones ortogonales.

Definición 2.26. $C^*(T)$ es la C^* -subálgebra unital de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generada por un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la cual es la clausura en norma de todos los polinomios en las variables T, T^* y I .

Observación 2.27. Si T es normal, entonces $C^*(T)$ es abeliana.

Definiciones 2.28. Sea A una C^* -álgebra. Entonces:

Si $S \subseteq A$, entonces $S^* = \{s^* : s \in S\}$. Decimos que S es autoadjunto si $S^* = S$.

Si $B \subseteq A$ subálgebra de A que es autoadjunta, entonces decimos que B es una C^* -subálgebra. Más aún, B resulta una C^* -álgebra con las operaciones de A restringidas a B .

Si $a, b \in A$, decimos que a y b son unitariamente equivalentes si existe $u \in A$ unitario tal que $u^*au = b$. Si a y b son unitariamente equivalentes, entonces $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Definición 2.29. Una subálgebra abeliana de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es llamada maximal si esta no está contenida en ninguna subálgebra mayor.

Definición 2.30. Sea Ω un espacio topológico compacto Hausdorff. Una medida espectral relativa a $(\Omega, \mathcal{H})$ para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una función $E : \mathfrak{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (donde $\mathfrak{B}(\Omega)$ es la σ -álgebra de todos los conjuntos Borel) tal que:

- i) $E(\emptyset) = 0 \quad E(\Omega) = 1$.
- ii) $E(S) = E(S)^* = E(S)^2$ para todo subconjunto S .
- iii) $E(S \cap S') = E(S) \cdot E(S')$.
- iv) Para todos $x, y \in \mathcal{H}$, la función $E_{x,y} : \mathfrak{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $E_{x,y}(S) = \langle E(S)x, y \rangle$ es una medida compleja y regular.

Teorema 2.31. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal. Entonces existe una única medida espectral E_A relativa a $(\sigma(A), \mathcal{H})$ tal que $A = \int z dE_A$, donde $z : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ es la función inclusión ($z(\lambda) = \lambda$).

Observación 2.32 (Cálculo funcional boreleano de operadores normales). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal. Entonces el teorema anterior garantiza la existencia de una medida espectral E_A relativa a $(\sigma(A), \mathcal{H})$ tal que $A = \int z dE_A$, donde $z : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ es la función inclusión. Sea $f \in B(\sigma(A))$, donde $B(\sigma(A))$ denota el álgebra de las funciones complejas uniformemente acotadas y medibles con respecto a la sigma álgebra de conjuntos boreleanos. Entonces podemos integrar f con respecto a la medida espectral

$$f(A) := \int_{\sigma(A)} f dE_A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

El operador $f(A)$ está determinado de forma única como el representante de la forma sesquilineal acotada $\langle x, y \rangle_{f(A)} = \int_{\sigma(A)} f dE_{x,y}$. Más aún, la función $\phi_A : B(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ determinada por $\phi_A(f) = f(A)$ es un $*$ -morfismo entre el álgebra de las funciones complejas uniformemente acotadas y medibles y el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, que satisface $\|f(A)\| \leq \|f\|_\infty$.

Definición 2.33. Sea A una C^* -álgebra. Una aproximación de la identidad para A es una red $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in A$ tal que:

- i) $u_\lambda \in A^+$, es decir, $u_\lambda \in A$ y $u_\lambda \geq 0$.
- ii) $\|u_\lambda\| \leq 1$.
- iii) Si $\lambda \geq \mu$ entonces $u_\lambda \geq u_\mu$.
- iv) $\lim_\lambda au_\lambda = \lim_\lambda u_\lambda a = a$ para todo $a \in A$, es decir $\lim_\lambda \|au_\lambda - a\| = 0$.

Teorema 2.34. Cada C^* -álgebra A admite una aproximación de la identidad. Más concretamente, si A es el conjunto dirigido de los $a \in A^+$, $\|a\| < 1$ y $u_\lambda = a$, para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es aproximación de la identidad.

Observación 2.35. En general se deben considerar aproximaciones de la identidad por redes. Sin embargo, podemos construir aproximaciones de la identidad indicadas por $\mathbb{N}$ en el caso en que A sea separable.

Definición 2.36. La topología fuerte de operadores, que llamaremos SOT, está determinada por la siguiente familia de abiertos básicos de un $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$W(u, x_1, \dots, x_n, \epsilon) = \left\{ v \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|(u - v)x_j\| < \epsilon, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Entonces, dada una red $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la red converge SOT a $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y solo si para todo $x \in \mathcal{H}$, $\|ux - v_\lambda x\| \rightarrow 0$.

La convergencia en la SOT está determinada por la familia de seminormas $p_x(u) = \|ux\|_{\mathcal{H}}$ de forma débil.

Definición 2.37. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ decimos que $u_\lambda \rightarrow u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ WOT si para todo $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle u_\lambda x, y \rangle \rightarrow \langle ux, y \rangle$ (donde WOT es la topología débil de operadores).

Definiciones 2.38. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el álgebra de los operadores lineales acotados en $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$ los que además son autoadjuntos, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ el ideal de los operadores compactos en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ los compactos positivos. Sea el cociente $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$, el cual es una C^* -álgebra conocida como el álgebra de Calkin. Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espectro esencial de T , denotado por $\sigma_e(T)$, que resulta el espectro de la clase $T + \mathcal{K}(\mathcal{H})$ en el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. La norma esencial de T es

$$\|T\|_e = \inf \left\{ \|T + K\| : K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \right\}$$

es la norma (cociente) de $T + \mathcal{K}(\mathcal{H})$, también en $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

$$(7) \quad S^+ = \int_{[\alpha^+(S), \|S\|]} (t - \alpha^+(S)) dE(t) \quad y \quad S_- = \int_{[-\|S\|, \alpha_-(S)]} (t - \alpha_-(S)) dE(t).$$

Notemos que $S_- \leq 0 \leq S^+$.

Definición 2.39. Sea $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ o $\mathbb{M} = \{1, \dots, m\} = \mathbb{I}_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert con $\dim \mathcal{K} = |\mathbb{M}|$ y sea $\beta = \{e_n\}_{n \in \mathbb{M}}$ una base ortonormal de $\mathcal{K}$.

- i) Para cualquier $a = (a_n)_{n \in \mathbb{M}} \in \ell_{\mathbb{C}}^\infty(\mathbb{M})$, denotamos por $\text{diag}_\beta(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ al operador diagonal dado por $\text{diag}_\beta(a)e_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{M}$.

- ii) Para $a \in \mathbb{C}^n$, denotamos por $\text{diag}(a) \in M_n$ la matriz diagonal (con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^n$) que tiene las entradas de a en la diagonal.
- iii) La esperanza condicional $E_\beta : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ asociado a la base β , está definida por $E_\beta(T) = \text{diag}_\beta(a)$ donde $a = (\langle Te_n, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$.

Una herramienta muy útil en el estudio de la teoría de operadores en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ es la llamada descomposición polar de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que describimos a continuación.

Teorema 2.40 (Descomposición polar). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces existe un único operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface $T = U|T|$, $UU^* = P$, $U^*U = Q$, donde $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ denota la proyección sobre $\overline{R(T)}$, Q denota la proyección sobre $\ker(T)$ y $|T| = (T^*T)^{1/2}$.*

2.3. Propiedades de operadores compactos

Teorema 2.41. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, K un operador compacto y $\sigma(K)$ su espectro. Entonces:*

- i) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(K)$, entonces λ es un autovalor de K .
- ii) Si $\lambda \in \sigma(K)$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\dim(\ker(\lambda I - K)) < \infty$.
- iii) $\sigma(K)$ es a lo sumo numerable y tiene a lo sumo un punto límite, el 0.

Observación 2.42. Si tenemos una sucesión $\lambda = (\lambda_j)_{j \geq 1} \in c_0^+$ y $\lambda_j \geq 0$ para todo $j \geq 1$, entonces podemos ordenarla de forma decreciente, es decir, podemos hallar una permutación $\tau \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ tal que $(\tau \cdot \lambda) = (\lambda_{\tau(i)})_{i \geq 1}$ cumpla que $\lambda_{\tau(i)} \geq \lambda_{\tau(i+1)}$ para todo $i \geq 1$. En efecto, puesto que $\lambda \in c_0$, para cada $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n < \epsilon$ para $n \geq n_0$. Tomando por ejemplo $\epsilon_1 = 1$ sabemos que hay finitos (que serán n_1) λ_j tales que $\lambda_j > \epsilon_1$, con lo cual podemos ordenarlos de forma decreciente. Sea ahora $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$, entonces hay n_2 λ_j con $\frac{1}{2} \leq \lambda_j < 1$, y nuevamente se los pueden ordenar de forma decreciente, quedando estos λ_j a continuación de los n_1 anteriores. Podemos continuar con este proceso, es decir, para $\epsilon_k = \frac{1}{k}$, hay n_k λ_j con $\frac{1}{k} \leq \lambda_j < \frac{1}{k-1}$ y podemos ordenarlos de manera decreciente, quedando a continuación de los anteriores ya ordenados. De esta manera, conseguimos construir por partes $\tau \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$.

Observación 2.43.

- i) Si K es un operador compacto positivo y $\lambda(K) = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ son sus autovalores, entonces podemos ordenarlos en forma decreciente. En efecto, por ser el operador positivo $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \geq 1$ y por el Teorema 2.41 iii) sabemos que $\lambda(K) \in c_0^+$.
- ii) Si $\lambda \notin c_0$, la sucesión no tiene por que poder reordenarse en forma decreciente. Por ejemplo, $\lambda = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Si intentamos ordenarla de manera decreciente tendríamos $(1, 1, 1, \dots)$ y no aparecerían los 0, pues tenemos infinitos 1.

Definición 2.44. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definimos la norma Hilbert-Schmidt de u como

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(x_\lambda)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $E = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(x_\lambda)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{F \in \mathcal{F}(\Lambda)} \left(\sum_{\lambda \in F} \|u(x_\lambda)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{F \in \mathcal{F}(\Lambda)} \left(\sum_{\lambda \in F} \|u(x_\lambda)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observación 2.45. La norma de Hilbert-Schmidt no depende de la base ortonormal E . En efecto, si $E' = (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es otra base ortonormal y si $F \subseteq \Lambda$ es finito,

$$\sum_{\lambda \in F} \|u(x_\lambda)\|^2 = \sum_{\lambda \in F} \sum_{\mu \in \Lambda} |\langle u(x_\lambda), y_\mu \rangle|^2 = \sum_{\mu \in \Lambda} \sum_{\lambda \in F} |\langle x_\lambda, u^*(y_\mu) \rangle|^2 \leq \sum_{\mu \in \Lambda} \|u^*(y_\mu)\|^2.$$

Como $F \subseteq \Lambda$ es arbitrario, $\sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(x_\lambda)\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \|u^*(y_\lambda)\|^2$.

Si $x_\lambda = y_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $\sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(x_\lambda)\|^2 = \sum_{\mu \in \Lambda} \|u^*(x_\mu)\|^2$ (por simetría).

Si $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es arbitraria, entonces tenemos que $\sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(x_\lambda)\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(y_\lambda)\|^2$ y por simetría

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(x_\lambda)\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|u(y_\lambda)\|^2.$$

■

Definición 2.46. Los operadores Hilbert-Schmidt son aquellos $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $\|u\|_2 < \infty$, es decir

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{H}) = \left\{ u \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|u\|_2 < \infty \right\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Lo notaremos como $\mathcal{L}^2$ en vez de $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$.

Definición 2.47. Si $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces definimos la norma de tipo traza de u como

$$\left\| |u|^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 = \|u\|_1$$

Si $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\|u\|_1 < \infty$ entonces u es de tipo traza y $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) = \left\{ u \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|u\|_1 < \infty \right\}$.

Lo notaremos como $\mathcal{L}^1$ en vez de $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Proposición 2.48. $\mathcal{L}^2$ es un ideal bilátero y autoadjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un álgebra normada con involución isométrica dada por el adjunto usual.

Definición 2.49. Sea $u \in \mathcal{L}^1$ y sea $E = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Definimos

$$\text{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle u x_\lambda, x_\lambda \rangle.$$

Notar que $\|u\|_1 = \text{tr}(|u|)$ donde $|u|$ denota la raíz cuadrada positiva de u^*u .

Observación 2.50. La identidad de polarización aplicada a $u = u_1 u_2$ (con $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^2$) muestra que $\text{tr}(u)$ no depende la base ortonormal E .

Teorema 2.51. Sea $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) v es tipo traza.
- ii) $|v|$ es tipo traza.

iii) $|v|^{\frac{1}{2}}$ es Hilbert-Schmidt.

iv) Existen $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^2$ tal que $v = u_1 u_2$.

Proposición 2.52. Si $v \in \mathcal{L}^1$ y $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces $vu \in \mathcal{L}^1$ y $uv \in \mathcal{L}^1$. Es decir, $\mathcal{L}^1$ es ideal bilátero en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además, $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^2$.

Teorema 2.53. Sean $u, v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que vale alguna de las siguientes condiciones:

i) $u, v \in \mathcal{L}^2$.

ii) $v \in \mathcal{L}^1$.

Entonces, $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$.

Definición 2.54. Sea $a = (a_n)_{n \geq 1} \in \ell_{\mathbb{C}}^1$ definimos $\text{tr}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Observación 2.55. i) Si $A \in \mathcal{L}^2$, entonces $E(A) \in \ell_{\mathbb{C}}^2$. En efecto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ii}|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \|A\|_2^2 < \infty.$$

ii) Si $A \in \mathcal{L}^1$, entonces $E(A) \in \ell_{\mathbb{C}}^1$. En efecto, si $A \in \mathcal{L}^1$, puesto que $|A| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(|A|) f_i \otimes f_i$,

donde $\{f_i\}$ es un sistema ortonormal de rango $(|A|)$, podemos escribir la descomposición polar

$$A = U|A| = U \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(|A|) f_i \otimes f_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(|A|) U(f_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(|A|) U f_i \otimes f_i$$

($U f_i$ es sistema ortonormal, pues U es isometría parcial en el rango $(|A|)$). Entonces $(s_i(A))_{i \geq 1} = (\lambda_i(|A|))_{i \geq 1} \in \ell_{\mathbb{C}}^1$. Si $\{e_i\}_{i \geq 1}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ que se obtiene de extender el sistema ortonormal $\{f_i\}_{i \geq 1}$, entonces existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva tal que $f_k = e_{\varphi(k)}$. Por lo tanto $E(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle A e_i, e_i \rangle e_i \otimes e_i$, por lo que $|E(A)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle A e_i, e_i \rangle|$. Pero

$$A e_i = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) (U f_j \otimes f_j) e_i = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \langle e_i, f_j \rangle U f_j = \begin{cases} 0 & \text{para } i \notin \text{Im} \varphi \\ s_{\varphi^{-1}(i)}(A) U f_{\varphi^{-1}(i)} & \text{para } i \in \text{Im} \varphi \end{cases}$$

Entonces

$$\langle A e_i, e_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{para } i \notin \text{Im} \varphi \\ s_{\varphi^{-1}(i)}(A) \langle U f_{\varphi^{-1}(i)}, e_i \rangle & \text{para } i \in \text{Im} \varphi \end{cases}$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle A e_i, e_i \rangle| \leq \sum_{i \in \text{Im}(\varphi)} s_{\varphi^{-1}(i)}(A) < \infty$, es decir, $\text{tr}(|E(A)|) < \infty$.

En particular, $\|E(A)\|_1 \leq \|A\|_1$.

■

Proposición 2.56. La esperanza condicional recién definida cumple las siguientes propiedades:

$$i) E(E(A)) = E(A).$$

$$ii) \|E(A)\| \leq \|A\|.$$

$$iii) E(A) \geq 0 \text{ si } A \geq 0.$$

$$iv) \operatorname{tr}(E(A)) = \operatorname{tr}(A).$$

Demostración: i) Trivial.

$$ii) \|E(A)\| = \max_{i \geq 1} |\langle Ae_i, e_i \rangle| \leq \sup_{x, y \in \mathcal{H}, \|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y \rangle| = \|A\|.$$

iii) Si $A \geq 0$ entonces $\langle Ae_i, e_i \rangle = a_{ii} \geq 0$ para todo $i \geq 1$, de donde

$$\langle E(A)x, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} |x_i|^2 \geq 0.$$

iv) Para A consideramos la base $\{e_i\}_{i \geq 1}$, entonces

$$\operatorname{tr}(E(A)) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle E(A)e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{jj} \langle E_j e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Ae_i, e_i \rangle = \operatorname{tr}(A).$$

■

2.4. Teorema de Weyl-von Neumann.

Los resultados de esta subsección son desarrollados por Davidson en [6]. Estos resultados serán usados en la Sección 4.

Definición 2.57. Llamamos álgebra de von-Neumann a una C^* -álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, la cual contiene al operador identidad y es cerrada en la topología débil de operadores (WOT). Si $\mathcal{S}$ es cualquier subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, definimos el conmutante de $\mathcal{S}$ por

$$\mathcal{S}' = \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : ST = TS \text{ para todo } S \in \mathcal{S} \right\}.$$

El doble conmutante de $\mathcal{S}$ es

$$\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}')' = \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS = ST, \text{ para todo } S \in \mathcal{S}' \right\}.$$

Observación 2.58. Si $\mathcal{S}$ es autoadjunto, entonces $\mathcal{S}'$ es un álgebra autoadjunta unital. Más aún, es WOT-cerrada. En efecto, si $T_\alpha \in \mathcal{S}'$ y $T_\alpha \xrightarrow{\text{WOT}} T$, entonces para cada $S \in \mathcal{S}$,

$$ST = \text{WOT} - \lim_{\alpha} ST_\alpha = \text{WOT} - \lim_{\alpha} T_\alpha S = TS.$$

En particular el conmutante de una C^* -álgebra es también un álgebra de von-Neumann.

Definición 2.59. Dado un operador T definimos $W^*(T)$ como el álgebra de von-Neumann generada por T . Es decir, $W^*(T) = \overline{C^*(T)}^{\text{WOT}}$.

Observación 2.60. Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es normal, entonces $C^*(T)$ es un álgebra abeliana, y entonces $\overline{C^*(T)}^{\text{WOT}}$ también es abeliana.

Lema 2.61. Sea $\mathcal{M}$ un álgebra abeliana de von-Neumann en un espacio de Hilbert separable. Entonces existe un operador autoadjunto A tal que $\mathcal{M} = W^*(A)$. Más aún, si $\mathcal{U}$ es una C^* -subálgebra separable de $\mathcal{M}$, se puede disponer de forma que $\mathcal{U} \subset C^*(A)$.

Demostración: La bola unitaria de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en la topología débil de operadores es metrizable y compacta. Entonces existe una familia numerable de operadores autoadjuntos, los cuales son WOT-densos en la bola unitaria de $\mathcal{M}^{sa}$. Incluimos en esta familia un subconjunto denso numerable de $\mathcal{U}^{sa}$. Cada operador autoadjunto está en la clausura en norma del espacio generado por las proyecciones espectrales correspondientes a intervalos diádicos. En consecuencia, existe una colección numerable $\{E_n\}$ de proyecciones en $\mathcal{M}$ que generan una C^* -álgebra E , la cual contiene $\mathcal{U}$ y es WOT-densa en $\mathcal{M}$.

Sea $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} E_n$. Afirmamos que $C^*(A) = E$. En efecto, puesto que A pertenece a E , es suficiente con mostrar que cada E_n pertenece a $C^*(A)$. Con este fin, notemos que

$$0 \leq E_1^\perp A = E_1^\perp \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} E_n \leq \frac{1}{6} E_1^\perp,$$

(la primer desigualdad vale porque $A \geq 0$ y conmuta con $E_1^\perp$, de donde

$$E_1^\perp A = (E_1^\perp)^{1/2} A (E_1^\perp)^{1/2} = C A C^* \geq 0$$

y la segunda desigualdad es porque $E_1^\perp E_n = (E_1^\perp)^2 E_n = E_1^\perp E_n E_1^\perp \leq E_1^\perp I E_1^\perp = E_1^\perp$ para cada $n \geq 2$, entonces $\frac{1}{3^n} E_1^\perp E_n \leq \frac{1}{3^n} E_1^\perp$ para $n \geq 2$ y sacando factor común $E_1^\perp$ sale la desigualdad) y de manera similar

$$\frac{1}{3} E_1 \leq E_1 A \leq \frac{1}{2} E_1$$

(usando que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} E_1 E_n \geq 0$, $E_1 A = E_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} E_n = \frac{E_1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} E_1 E_n \geq \frac{E_1}{3}$ y por el mismo argumento que antes, $E_1 E_n \leq E_1$ para toda $n \geq 1$). Por lo tanto, se sigue que el espectro $\sigma(A)$ está contenido en $\left[0, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Así $C^*(A)$ contiene la proyección $E_A \left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right) = E_1$ (pues $E_A \left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right) = \chi_{[1/3, 1/2]}(A)$ es continua en el espectro). Después, restando $\frac{1}{3} E_1$ de A , podemos de la misma manera mostrar que E_2 pertenece a $C^*(A)$, y recursivamente podemos establecer que $E_n \in C^*(A)$, para todo $n \geq 1$, y $C^*(A) = E$. Por lo tanto, $W^*(A) = \overline{E}^{WOT} = \mathcal{M}$. ■

Definición 2.62. Decimos que dos operadores A y B son aproximadamente unitariamente equivalentes y lo notaremos $A \sim B$ si existe una sucesión de operadores unitarios U_n tales que $B = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n A U_n^*$. Es evidente que dos operadores son aproximadamente unitariamente equivalentes si y solo si tienen la misma clausura de la órbita unitaria

$$\overline{\mathcal{U}} = \overline{\{U A U^* : U \text{ es unitario}\}}.$$

El siguiente Teorema muestra que los operadores normales pueden ser escrito como operadores diagonales más operadores compactos. Esto nos permitirá deducir que cada operador normal es aproximadamente unitariamente equivalente por un operador diagonal, lo cual facilitará nuestra clasificación. Recordemos que si N es un operador normal, entonces $C^*(N)$ es una C^* -subálgebra abeliana de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Teorema 2.63. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una C^* -subálgebra abeliana separable de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces existe una base ortonormal $\{e_k : k \geq 1\}$ de $\mathcal{H}$ de modo que $\mathcal{U}$ está contenida en $\mathcal{D} + \mathcal{K}$, donde

$\mathcal{D}$ es el álgebra de operadores diagonales con respecto a esta base. Además, dada una colección finitas $\mathcal{P}$ de proyecciones en $\mathcal{U}''$, podemos elegir la base de forma que esa colección esté contenida en $\mathcal{D}$.

Demostración: Por el Lema 2.61, $\mathcal{U}$ está contenida en una C^* -álgebra E , generada por una familia numerable de proyecciones que conmutan $\mathcal{E} = \{E_n, n \geq 1\}$, es decir, $E = \overline{\text{span}(\mathcal{E})}$. Si tenemos tal colección finita $\mathcal{P}$ de proyecciones, podemos suponer que ellas son las primeras N en la lista.

Construimos una aproximación de la identidad F_k de proyecciones para $\mathcal{K}$, la cual cumple que $\lim_k \|F_k E_n - E_n F_k\| = 0$ para toda $E_n \in E$ como sigue: Fijamos una base ortonormal $x_1, x_2, \dots$ de $\mathcal{H}$. Para cada proyección E_i , denotemos $E_i^{(-1)} = I - E_i$ y $E_i^{(1)} = E_i$, entonces para $k \geq N$, sea

$$\mathcal{L}_k = \text{span} \left\{ \prod_{i=1}^k E_i^{(\epsilon_i)} x_j : 1 \leq j \leq k, \epsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

Entonces $\mathcal{L}_k$ es una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita en $\mathcal{H}$. Notemos además que,

$$I = I \dots I = (E_1^{(1)} + E_1^{(-1)}) \dots (E_k^{(1)} + E_k^{(-1)}) = \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \prod_{i=1}^k E_i^{(\epsilon_i)}$$

entonces $x_j = I x_j = \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{-1, 1\}^k} \prod_{i=1}^k E_i^{(\epsilon_i)} x_j$ que pertenece a $\mathcal{L}_k$, para $1 \leq j \leq k$, pues

$\prod_{i=1}^k E_i^{(\epsilon_i)} x_j \in \mathcal{L}_k$. Por lo tanto, $\{x_j\}_{j \geq 1} \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{L}_k$, y entonces $x = \lim_{F \subset \mathbb{N}, F \text{ finito}} \sum_{j \in F} \langle x, x_j \rangle x_j$ donde $\sum_{j \in F} \langle x, x_j \rangle x_j \in \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{L}_k$, es decir, la unión de los $\mathcal{L}_k$ es densa.

Así, las proyecciones ortogonales F_k sobre $\mathcal{L}_k$ crecen fuertemente a I , de donde es una aproximación de la identidad para $\mathcal{K}$.

Notemos también que $\mathcal{L}_k$ es invariante para E_n cuando $n \leq k$. En efecto, basta probar que $E_n x \in \mathcal{L}_k$ para todos los generadores (como espacio lineal) de $\mathcal{H}$. Sea $x = \prod_{i=1}^k E_i^{(\epsilon_i)} x_j$, para $1 \leq j \leq k$. Entonces, como los E_n conmutan, tenemos

$$E_n x = E_n \prod_{i=1}^k E_i^{(\epsilon_i)} x_j = E_n E_n^{(\epsilon_i)} \prod_{i=1, i \neq n}^k E_i^{(\epsilon_i)} x_j = \begin{cases} x \in \mathcal{L}_k & \text{si } \epsilon_i = 1 \\ 0 \in \mathcal{L}_k & \text{si } \epsilon_i = -1 \end{cases}$$

es decir, $E_n x \in \mathcal{L}_k$. Por lo tanto F_k conmuta con estas proyecciones. En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k E_n - E_n F_k = 0 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Esta conclusión se extiende para la clausura del espacio lineal.

Sean

- i) $D_n = E_n$, para $1 \leq n \leq N$.
- ii) $D_n = E_n(I - F_n)$, para cada $n > N$.

Entonces, la proyección D_n conmuta con cada F_k para $k \geq N$ y con todos los otros D_m .

Sea $\mathcal{D}$ la C^* -álgebra generada por $\{D_n : n \geq 1\}$. Es inmediato que es una C^* -álgebra abeliana, tal que $\mathcal{U} \subset E \subset \mathcal{D} + \mathcal{K}$.

Nos resta mostrar que $\mathcal{D}$ es diagonalizable. Como $\mathcal{D}$ conmuta con cada F_k para $k \geq N$, los subespacios de dimensión finita $\mathcal{H}_N = \mathcal{L}_N$ y $\mathcal{H}_k = \mathcal{L}_k \ominus \mathcal{L}_{k-1}$ para $k > N$ son todos invariantes para $\mathcal{D}$. La restricción de $\mathcal{D}$ a $\mathcal{H}_k$ es una familia de matrices normales que conmutan, la cual es simultáneamente diagonalizable. Elegimos una base para cada $\mathcal{H}_k$. La base para $\mathcal{H}$ la obtenemos combinando estas bases para cada k que diagonalizan $\mathcal{D}$. ■

El siguiente Corolario asegura que cada operador normal es una pequeña perturbación compacta de un operador diagonalizable.

Corolario 2.64. *En un espacio de Hilbert separable, cada operador normal N puede ser expresado como $N = D + K$, donde D es un operador normal diagonal y K un operador compacto. Más aún, para cada $\epsilon > 0$ y cada conjunto de n operadores autoadjuntos $A_1, \dots, A_n$, que conmutan dos a dos, existen simultáneamente operadores diagonales autoadjuntos $D_1, \dots, D_n$ y operadores compactos $K_1, \dots, K_n$ tales que $A_i = D_i + K_i$ y $\|K_i\| < \epsilon$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demostración: Necesitamos una manera eficaz de construir cada uno de los A_i por proyecciones. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \leq A_i \leq I$ (si no fuera así, lo trasladar haciendo $\frac{A_i + \|A_i\|I}{2\|A_i\|}$).

Para cada $k \geq 1$ definimos los conjuntos

$$C_k = \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{2i-1}{2^k}, \frac{2i}{2^k} \right] = \left(\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k} \right] \cup \left(\frac{3}{2^k}, \frac{4}{2^k} \right] \cup \dots \cup \left(\frac{2^{k-1}}{2^k}, \frac{2^k}{2^k} \right].$$

Además, definimos para cada $n \geq 1$, $f_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \chi_{C_k}$. Observamos que $\sup_{x \in [0,1]} |x - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

Para cada A_i , consideremos las proyecciones espectrales $E_k^{(i)} = E_{A_i}(C_k)$ para $k \geq 1$. Por las propiedades del cálculo funcional $f_n(A_i) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} E_k^{(i)}$ con lo cual

$$\left\| A_i - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} E_k^{(i)} \right\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Entonces

$$A_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k} E_k^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} E_k^{(i)}.$$

Elegimos N suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Entonces aplicamos el resultado anterior para la familia $\mathcal{E} = \{E_k^{(i)} : k \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ (que es la C^* -subálgebra $\mathcal{U}$ generada por $\mathcal{E}$). Como $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia abeliana, entonces $\mathcal{U}$ es abeliana y separable por construcción). Obtenemos un álgebra diagonal $\mathcal{D}$, la cual además satisface:

- $D_k^{(i)} = E_k^{(i)}$, para $1 \leq k \leq N$ y $1 \leq i \leq n$.
- $D_k^{(i)} = E_k^{(i)} - R_{ik}$, para $k > N$ y $1 \leq i \leq n$, donde R_{ik} es una proyección de rango finito (por inspección de la prueba de 2.63 ii)).

Entonces sea

$$B_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} D_k^{(i)}.$$

Estos son diagonales positivos y contractivos en $\mathcal{D}$. Más aún,

$$K_i = A_i - B_i = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} R_{ik}.$$

Se sigue que los K_i son compactos y $\|K_i\| \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon$. Para obtener el resultado para un operador normal N , aplicamos este resultado a las partes reales e imaginarias, pues si N es normal, podemos escribir $N = A + iB$, con A y B autoadjuntos que conmutan pues

$$\begin{aligned} NN^* = N^*N &\Rightarrow (A + iB)(A - iB) = (A - iB)(A + iB) \\ &\Rightarrow A^2 - iAB + iBA + B^2 = A^2 + iAB - iBA + B^2 \Rightarrow 2iBA = 2iAB \\ &\Rightarrow BA = AB. \end{aligned}$$

■

Lema 2.65. *Supongamos que X es un espacio métrico compacto. Sean $\{\zeta_k : k \geq 1\}$ y $\{\xi_k : k \geq 1\}$ dos subconjuntos densos numerables de X tales que cada punto aislado de X se repite el mismo número de veces en cada sucesión. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe una permutación $\tau \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ de manera que $\text{dist}(\zeta_k, \xi_{\tau(k)}) < \epsilon$, para todo $k \geq 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\zeta_k, \xi_{\tau(k)}) = 0$.*

Demostración: Sea X_e el conjunto de los puntos no aislados de X , junto con todos los puntos aislados que sean repetidos infinitas veces en las sucesiones. Primero emparejamos los términos de cada sucesión que están a una distancia de al menos $\frac{\epsilon}{2}$ de X_e (los cuales son puntos aislados y hay finitos por ser X compacto). Estos pares se encuentran a una distancia cero los unos de los otros (en las dos sucesiones están repetidos la misma cantidad finita de veces), y así no afectan el resultado final. Entonces restringimos nuestra atención a los restantes puntos y podemos suponer que cada punto en X está a distancia menor que $\frac{\epsilon}{2}$ de X_e .

Construimos τ recursivamente. En la k -ésima etapa, nos encargaremos de que $\tau(j)$ y $\tau^{-1}(j)$ sean definidos para $1 \leq j \leq k$ de manera que, si $\tau(i)$ está definido,

$$|\zeta_i - \xi_{\tau(i)}| < \max \left\{ \text{dist}(\zeta_i, X_e) + \frac{\epsilon}{2^i}, \text{dist}(\xi_{\tau(i)}, X_e) + \frac{\epsilon}{2^{\tau(i)}} \right\}.$$

En efecto, si $\tau(k)$ está aún indefinido, elegimos l fuera del rango de la función definida parcialmente τ de manera que

$$|\zeta_k - \xi_l| < \text{dist}(\zeta_k, X_e) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Esto es posible, ya que $\{\xi_l\}$ es denso en X_e y los puntos aislados de X_e están repetidos infinitas veces. Entonces sea $\tau(k) = l$.

De manera similar, si k no está en el rango de la función parcialmente definida τ , elegimos un entero l , el cual no está en el dominio de τ , de modo que

$$|\zeta_l - \xi_k| < \text{dist}(\xi_k, X_e) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Entonces establecemos $\tau(l) = k$.

Procediendo de esta manera, la función τ está eventualmente definida para todo $\mathbb{N}$, de manera que es una biyección que satisface la estimación deseada.

■

En lo que sigue, dado $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\text{null}(M)$ denota $\dim \ker(M)$.

Lema 2.66. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sean M y N operadores diagonales con respecto a dos bases ortonormales. Entonces $M \sim N$ si y solo si:

i) $\sigma_e(M) = \sigma_e(N)$.

ii) $\text{null}(M - \lambda I) = \text{null}(N - \lambda I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \sigma_e(M)$.

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que $M \sim N$. Si U_n son operadores unitarios tales que $N = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n M U_n^*$, entonces $X = \sigma(N) = \sigma(M)$. En efecto, si $\lambda \in \rho(N)$ entonces $(\lambda I - N)$ es invertible y el conjunto de los invertibles es abierto en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Luego $U_n^*(\lambda I - M)U_n = \lambda I - U_n^* M U_n \rightarrow (\lambda I - N)$, por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $U_n^*(\lambda I - M)U_n$ es invertible. Es decir, $\lambda \in \rho(M)$, de donde $\rho(N) \subseteq \rho(M)$ y por lo tanto $\sigma(M) \subseteq \sigma(N)$. Por simetría, $\sigma(N) = \sigma(M)$. Además

$$f(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n f(M) U_n^* \quad \text{para} \quad f \in C(X).$$

En particular, si $f = \chi_{\{x\}}$ es la función característica para un punto aislado de X , entonces

$$E_N(\{x\}) = \chi_{\{x\}}(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \chi_{\{x\}}(M) U_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n E_M(\{x\}) U_n^*.$$

Entonces se sigue que estas dos proyecciones tienen el mismo rango. Esto establece ii), y muestra que M y N tienen los mismos puntos aislados en sus espectros esenciales. Puesto que cada punto no aislado de $\sigma(M) = \sigma(N)$ está en el espectro esencial, i) se sigue.

$\Leftarrow$) Como M y N son ambos diagonalizables podemos escribir $M = \text{diag}(\mu_k)$ con respecto a la base $\{e_k\}$ y $N = \text{diag}(\nu_k)$ con respecto a la base $\{f_k\}$ donde $\{\mu_k\}$ y $\{\nu_k\}$ son subconjuntos densos de $X = \sigma(M) = \sigma(N)$. Más aún, cualquier punto aislado de X debe estar repetido de acuerdo a la multiplicidad del autovalor, la cual es la misma para M y N por las hipótesis. Sea $X_e = \sigma_e(M)$.

Dado cualquier $\epsilon > 0$, el Lema 2.65 produce una permutación $\tau \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ de modo tal que $|\mu_k - \nu_{\tau(k)}| < \epsilon$ para todo k y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k - \nu_{\tau(k)}| = 0.$$

Por lo tanto, el operador unitario dado por $U e_k = f_{\tau(k)}$ satisface

$$M - U^* N U = \text{diag}(\mu_k - \nu_{\tau(k)}),$$

el cual es compacto y tiene norma $\|M - U^* N U\| < \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, se sigue que $M \sim N$. ■

Teorema 2.67 (Teorema de Weyl-von Neumann). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal. Entonces existe D diagonal tal que $M \sim D$.

Demostración: Sea F_M el conjunto de todos los autovalores aislados de multiplicidad finita de M . Notemos que si $\lambda \in F_M$ entonces $E_M(\lambda) \neq 0$. Además, si $\lambda, \mu \in F_M$ con $\lambda \neq \mu$, entonces $E_M(\lambda)E_M(\mu) = 0$, con lo que tenemos $P_0 = \sum_{\lambda \in F_M} E_M(\lambda)$ proyector y $\mathcal{H}_0 = P_0 \mathcal{H}$ subespacio reductor para M . Para cada $\lambda \in F_M$, sea $\{e_1^\lambda, \dots, e_{n_\lambda}^\lambda\}$ la base ortonormal del rango de $E_M(\lambda)$. Entonces sea $\beta = \bigcup_{\lambda \in F_M} \{e_1^\lambda, \dots, e_{n_\lambda}^\lambda\}$ la base ortogonal de autovectores de M del rango de P_0 .

Entonces, si separamos $\mathcal{H} = P_0 \mathcal{H} + P_0^\perp \mathcal{H}$ M puede ser descompuesto como $M = M_0 \oplus M'$. Por lo dicho antes, M_0 es diagonalizable en β y M' es normal, donde $\sigma(M')$ está contenido (posiblemente propiamente) en $X_e = \sigma_e(M)$ (pues los autovalores aislados de multiplicidad finita se relacionan con M_0). Por el Corolario 2.64, para cada entero positivo k , existe un operador diagonalizable

D_k tal que $M' - D_k$ es compacto y $\|M' - D_k\| < \frac{1}{2k}$. En particular, los autovalores de D_k están a una distancia de a lo sumo $\frac{1}{2k}$ de X_e y se acercan asintóticamente a X_e . Así, existe una perturbación diagonal compacta D'_k de D_k de modo que $\sigma(D'_k) \subset X_e$ y $\|M' - D'_k\| < \frac{1}{k}$.

Sea $E_k = M_0 \oplus D'_k$. Cada E_k es diagonalizable con los mismos autovalores y con la misma multiplicidad que M y espectro esencial X_e . Así, por el Lema 2.66, $E_k \sim E_1$ para todo $k \geq 1$. Pero $M - E_k$ es compacto y $\lim_{k \rightarrow \infty} \|M - E_k\| = 0$. Entonces se sigue que $M \sim E_1$.

Lo mismo vale para N , y por lo tanto $M \sim N$. ■

3. Diagonales aproximadas de operadores acotados. Caso diagonalizable

En la presente sección estudiaremos parte del trabajo de Neumann [10]. El resultado más importante, es una versión del Teorema de Schur-Horn para operadores diagonales en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (Teorema 3.37).

Para llegar a este resultado, empezamos estudiando propiedades de sucesiones en los diferentes espacios ℓ^p , con $1 \leq p \leq \infty$. Por medio de la definición de funcionales L_k logramos sustituir las desigualdades de la mayorización, obteniendo relaciones entre los elementos que pertenecen a la cápsula convexa de las permutaciones de un elemento dado y este mismo. Con todo esto, llegamos a un teorema «del estilo» Schur-Horn, sólo que formulado para sucesiones. Luego reformulamos este resultado en términos de operadores diagonales.

Para esta sección consideramos solo sucesiones de valores reales. Notaremos $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty} = \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$, $\ell_{\mathbb{R}}^p = \ell_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{N})$ y $\ell_{\mathbb{R}}^1 = \ell_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{N})$.

Definimos $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ como el grupo de biyecciones de $\mathbb{N}$ con la composición. Consideramos $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ actuando sobre $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ permutando las entradas, es decir: si $\tau \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ y $a = (a_i)_{i \geq 1} \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ entonces $(\tau \cdot a)_i = a_{\tau(i)}$ para $i \geq 1$.

Definición 3.1. Para $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$, $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a = \{(\tau \cdot a) : \tau \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}\}$ es la órbita de a bajo la acción de $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$.

En esta sección estudiaremos los conjuntos $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$, donde $\overline{A}^p$ es la clausura de $A \subseteq \ell_{\mathbb{R}}^p$ en la topología $\ell_{\mathbb{R}}^p$, con $1 \leq p \leq \infty$. Si omitimos el p , es la topología usual de $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$.

Definición 3.2. Para $a \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathbb{S}_na = \{(\tau \cdot a) : \tau \in \mathbb{S}_n\}$.

Si E es un subconjunto de $\mathbb{N}$ con k elementos, entonces $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}(E)$ son las permutaciones de esos k elementos.

Notemos que con esta notación, para $a \in \mathbb{R}^n$, $\text{conv}(\mathbb{S}_na) = K_a$.

En el caso de dimensión finita, el Teorema 2.17 dice que dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, entonces y está en $\text{conv}(\mathbb{S}_nx)$ si y solo si

$$\text{i) } \text{tr}(x) = \text{tr}(y).$$

$$\text{ii) } \sup \left\{ \sum_{i=1}^k y_{\sigma(i)} \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^k x_{\tau(i)} : \tau \in \mathbb{S}_n \right\}, \text{ para } 1 \leq k \leq n, \text{ para toda } \sigma \in \mathbb{S}_n.$$

Ahora nuestro objetivo es extender este resultado a dimensión infinita.

Definimos $\mathcal{C}_k$ como el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{N}$ de orden k . Entonces $\mathcal{C} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k$ es el conjunto de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Para $E \in \mathcal{C}_k$ definimos el funcional lineal continuo L_E en $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ por:

$$L_E(a) := \sum_{j \in E} a_j, \quad a = (a_j)_{j \geq 1} \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$L_k(a) = \sup_{E \in \mathcal{C}_k} L_E(a).$$

Como $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ no siempre puede ser reordenado de manera decreciente, no podemos afirmar que $L_k(a)$ es la suma de las mayores k entradas de a (aunque en esencia, esa es la idea), en cambio si $a \in c_0$, entonces las entradas positivas de a pueden ser ordenadas (por la Observación 2.42). Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ son las mayores k entradas de a , entonces $L_k(a) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

Observación 3.3. Notemos que $L_k(a)$ es subaditivo. En efecto,

$$L_k(a+b) = \sup_{E \in \mathcal{C}_k} L_E(a+b) \leq \sup_{E \in \mathcal{C}_k} L_E(a) + \sup_{E \in \mathcal{C}_k} L_E(b) = L_k(a) + L_k(b).$$

Recordemos que (ver Definición 2.7) a cada permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ le asociamos una matriz de permutación $P_\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ tal que $(\sigma \cdot x) = P_\sigma x$. Entonces consideramos las expresiones lineales de la forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$.

Veremos ahora dos propiedades que cumple $b \in \text{conv}(\mathbb{S}_\mathbb{N} a)$ si $a \in \ell_\mathbb{R}^\infty$:

Lema 3.4. Sea $a \in \ell_\mathbb{R}^\infty$ y $b \in \text{conv}(\mathbb{S}_\mathbb{N} a)$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$i) \quad L_k(b) \leq L_k(a).$$

$$ii) \quad L_k(-b) \leq L_k(-a).$$

Más aún, el conjunto de todos los elementos b que cumplen $i)$ y $ii)$ es cerrado en la topología producto. Si $a \in \ell_\mathbb{R}^p$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces es cerrado en la topología de $\ell_\mathbb{R}^p$.

Demostración: El conjunto que satisface $i)$ y $ii)$ es cerrado en la topología producto pues para todo $A \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\left\{ b : \sup_{E \in \mathcal{C}_k} L_E(b) \leq A \right\} = \bigcap_{E \in \mathcal{C}_k} \left\{ b : L_E(b) \leq A \right\}$$

y para cada $E \in \mathcal{C}_k$ el conjunto $\{b : L_E(b) \leq A\}$ es cerrado en la topología producto.

$i)$ Sea $E \in \mathcal{C}_k$ y tomamos $b \in \text{conv}(\mathbb{S}_\mathbb{N} a)$ entonces existen para $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $\sigma_i \in \mathbb{S}_\mathbb{N}$ tales que $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a)$. Entonces

$$\begin{aligned} L_E(b) &= L_E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a)\right) = \sum_{j \in E} \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_{\sigma_i}(a))_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j \in E} (P_{\sigma_i}(a))_j \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j \in E} a_{\sigma_i(j)}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(L_{\sigma_i(E)}(a)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} L_{\sigma_i(E)}(a) \leq L_k(a). \end{aligned}$$

Ahora tomando supremo tenemos $L_k(b) = \sup_{E \in \mathcal{C}_k} L_E(b) \leq L_k(a)$.

Para $ii)$ es análogo, usando $-b$.

Ahora, para probar que si $a \in \ell_\mathbb{R}^p$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces el conjunto de todos los elementos que cumplen $i)$ y $ii)$ es cerrado en la topología de $\ell_\mathbb{R}^p$, tomemos $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \ell_\mathbb{R}^p$ tales que $a_n \xrightarrow{\ell_\mathbb{R}^p} a \in \ell_\mathbb{R}^p$. Veamos que $a_n \rightarrow a$ *-débil, es decir, si $b \in \ell_\mathbb{R}^1$, veamos que $\varphi_{a_n}(b) \rightarrow \varphi_a(b)$ donde $\varphi_a(b) = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ (pues $\ell_\mathbb{R}^p \subseteq \ell_\mathbb{R}^\infty$ y $(\ell_\mathbb{R}^\infty)^* = \ell_\mathbb{R}^1$).

$$\left| \sum_{i=1}^\infty (a_n)_i b_i - \sum_{i=1}^\infty a_i b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^\infty ((a_n)_i - a_i) b_i \right| \leq \|a_n - a\|_p \|b\|_q \rightarrow 0$$

(por la desigualdad de Hölder y $\|a_n - a\|_p \rightarrow 0$).

■

Notemos que si a $L_k(a)$ lo pensamos como “sumar las k mayores entradas de a ” las desigualdades $L_k(b) \leq L_k(a)$ y $L_k(-b) \leq L_k(-a)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ juegan el papel que jugaban las sumas parciales en la definición de la mayorización (Definición 2.1 i)).

Sea $a \in \mathbb{R}$, sean $a^+ = \max\{a, 0\}$ y $a^- = \max\{-a, 0\}$. Para una sucesión $b = (b_i)_{i \geq 1}$, sean $b^+ = (b_i^+)_{i \geq 1}$ y $b^- = (b_i^-)_{i \geq 1}$.

Observación 3.5. Con las notaciones anteriores entonces tenemos que $b = b^+ - b^-$. Por ejemplo, si $b = (1, 2, 0, -1, 3, -2, \dots)$, entonces $b^+ = (1, 2, 0, 0, 3, 0, \dots)$ y $b^- = (0, 0, 0, 1, 0, 2, \dots)$ de donde vemos que $b = b^+ - b^-$.

Empezaremos ahora a analizar propiedades cuando $a \in c_0$.

Lema 3.6. Sea $a = (a_i)_{i \geq 1} \in c_0$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$i) L_k(a) = L_k(a^+).$$

$$ii) L_k(-a) = L_k(a^-).$$

En particular, $L_k(a)$ y $L_k(-a)$ son ambos no negativos.

Demostración: Como $a \in c_0$, se pueden encontrar las mayores k entradas $a_{i_m}^+$ con $1 \leq m \leq k$ (si hubiese menos de k entradas positivas, las últimas serán ceros). Entonces

$$L_k(a^+) = \sum_{m=1}^k a_{i_m}^+ \geq L_k(a).$$

Para mostrar la otra desigualdad, vemos por casos:

■ Si a tiene al menos k entradas positivas, sean $a_{i_1} = a_{i_1}^+, \dots, a_{i_k} = a_{i_k}^+$ las k mayores, entonces $L_k(a) = a_{i_1} + \dots + a_{i_k} = a_{i_1}^+ + \dots + a_{i_k}^+ = L_k(a^+)$.

■ Si $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$ son todas las entradas positivas, con $n < k$, entonces $L_k(a^+) = \sum_{j=1}^n a_{i_j} =$

$\sum_{j=1}^n a_{i_j}^+$. Como $a \in c_0$, podemos para cada $\epsilon > 0$ hallar números $a_{i_{n+1}}, \dots, a_{i_k}$ tales que

$$\sum_{j=n+1}^k a_{i_j} \geq -\epsilon. \text{ Entonces,}$$

$$L_k(a) = \sup_{E \in \mathcal{C}_k} L_E(a) \geq \sum_{j=1}^n a_{i_j} + \sum_{j=n+1}^k a_{i_j} \geq \sum_{j=1}^n a_{i_j}^+ - \epsilon = L_k(a^+) - \epsilon,$$

y la desigualdad que queríamos sale.

ii) Se deduce de aplicar i) a $-a$. ■

Lema 3.7. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_m \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^m \lambda'_j = 1$. Sean E_1 y E_2 subconjuntos de $\mathbb{N}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}(E_1), \sigma'_1, \dots, \sigma'_m \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}(E_2)$. Entonces existen $\mu_1, \dots, \mu_s \in [0, 1]$ tales que $\sum_{k=1}^s \mu_k = 1$ y $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\}, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, m\}$ (donde $s = nm$) tales que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} = \sum_{k=1}^s \mu_k P_{\sigma_{i_k}} \quad y \quad \sum_{j=1}^m \lambda'_j P_{\sigma'_j} = \sum_{k=1}^s \mu_k P_{\sigma'_{j_k}}.$$

Demostración: Definimos $\mu_{ij} = \lambda_i \cdot \lambda'_j$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda'_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m \lambda'_j \right) = 1$$

y así tenemos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \left(\sum_{j=1}^m \lambda'_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda'_j P_{\sigma_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_{ij} P_{\sigma_i}.$$

Análogamente

$$\sum_{j=1}^m \lambda'_j P_{\sigma'_j} = \sum_{j=1}^m \lambda'_j P_{\sigma'_j} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda'_j \lambda_i P_{\sigma'_j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_{ij} P_{\sigma'_j},$$

y cambiamos el conjunto de índices de las μ_{ij} de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ a $\{1, \dots, s\}$ tenemos lo deseado. ■

Proposición 3.8. Sea $a = (a_i)_{i \geq 1} \in \ell_{\mathbb{R}}^1$. Entonces $b = (b_i)_{i \geq 1} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}^1$ si y solo si:

i) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

ii) $L_k(b) \leq L_k(a)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

iii) $L_k(-b) \leq L_k(-a)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: $\Rightarrow$ Sea $b \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)$, es decir, para $1 \leq i \leq n$ existen λ_i con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y

$\sigma_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ tales que $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a)$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a) \right)_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{\sigma_i(j)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma_i(j)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

de donde sale i).

El Lema 3.4 muestra que ii) y iii) valen si $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}^1$.

$\Leftarrow$) Supongamos que i), ii) y iii) valen para b .

La idea es truncar a y b y aplicar el Teorema 2.20 a sus entradas positivas y negativas en forma separada. Primero tendremos que verificar que las sucesiones truncadas siguen satisfaciendo la condición i). Notemos que las sucesiones a^+ y b^+ pueden ya no cumplirla.

Sean $\alpha_1^+ \geq \alpha_2^+ \geq \dots$ las entradas positivas de a y $\alpha_1^- \leq \alpha_2^- \leq \dots$ las negativas. De manera similar, sean $\beta_1^+ \geq \beta_2^+ \geq \dots$ y $\beta_1^- \leq \beta_2^- \leq \dots$ las entradas positivas y negativas de b respectivamente. Continuamos cualquiera de estas sucesiones con 0 si a o b tienen solo finitas entradas positivas o negativas.

Ahora, sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces existen enteros r, s y números positivos B^+, B^- tales que

$$B^+ = \sum_{i=r+1}^{\infty} \beta_i^+ \leq \epsilon \quad \text{y} \quad -B^- = \sum_{i=s+1}^{\infty} \beta_i^- \geq -\epsilon.$$

Además, existen enteros p y q tales que

$$\sum_{i=p}^{\infty} \alpha_i^+ > B^+ \geq \sum_{i=p+1}^{\infty} \alpha_i^+ \quad \text{y} \quad \sum_{i=q}^{\infty} \alpha_i^- < -B^- \leq \sum_{i=q+1}^{\infty} \alpha_i^-.$$

Entonces podemos hallar $\alpha_p^{+*} \in (0, \alpha_p^+]$ y $\alpha_q^{-*} \in [\alpha_q^-, 0)$ tales que

$$(8) \quad (\alpha_p^+ - \alpha_p^{+*}) + \alpha_{p+1}^+ + \dots = B^+, \quad (\alpha_q^- - \alpha_q^{-*}) + \alpha_{q+1}^- + \dots = -B^-.$$

Sea $m = \max\{p, r\}$ y $n = \max\{q, s\}$. Definimos las sucesiones

$$a' = \left(\alpha_1^+, \dots, \alpha_{p-1}^+, \alpha_p^{+*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-p}, \alpha_1^-, \dots, \alpha_{q-1}^-, \alpha_q^{-*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q}, 0, 0, \dots \right),$$

$$b' = \left(\beta_1^+, \dots, \beta_r^+, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-r}, \beta_1^-, \dots, \beta_s^-, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-s}, 0, 0, \dots \right).$$

(de donde $\sum_{i=1}^{\infty} a'_i = \sum_{i=1}^{m+n} a'_i = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i^+ + \alpha_p^{+*} + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i^- + \alpha_q^{-*}$). Entonces, permutando a y b de forma conveniente, lo cual no viola la condición de que $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}^1$, tenemos $\|a - a'\|_1 = \|b - b'\|_1 = B^+ + B^- \leq 2\epsilon$.

También tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^- - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^- \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i^+ + \sum_{i=p}^{\infty} \alpha_i^+ + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i^- + \sum_{i=q}^{\infty} \alpha_i^- - \sum_{i=1}^r \beta_i^+ - \sum_{i=r+1}^{\infty} \beta_i^+ - \sum_{i=1}^s \beta_i^- - \sum_{i=s+1}^{\infty} \beta_i^- \\ &= \sum_{i=1}^m a'_i + B^+ + \sum_{i=m+1}^{m+n} a'_i - B^- - \sum_{i=1}^m b'_i - B^+ - \sum_{i=m+1}^{m+n} b'_i + B^- \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a'_i - \sum_{i=1}^m b'_i \right) + \left(\sum_{i=m+1}^{m+n} a'_i - \sum_{i=m+1}^{m+n} b'_i \right). \end{aligned}$$

(para la cuarta igualdad usamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i^+ + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i^- &= \sum_{i=1}^{m+n} a'_i - \alpha_p^{+*} - \alpha_q^{-*} \\ &= \sum_{i=1}^m a'_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a'_i + \left(B^+ - \sum_{i=p}^{\infty} \alpha_i^+ \right) + \left(-B^- - \sum_{i=q}^{\infty} \alpha_i^- \right) \end{aligned}$$

por (8), también que $\sum_{i=1}^m b'_i = \sum_{i=1}^r \beta_i^+$ y $\sum_{i=m+1}^{m+n} b'_i = \sum_{i=1}^s \beta_i^-$ y las definiciones de B^+, B^-). Por lo tanto, existe $\delta \geq 0$ tal que

$$\delta = \sum_{i=1}^m a'_i - \sum_{i=1}^m b'_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} b'_i - \sum_{i=m+1}^{m+n} a'_i.$$

Ahora, podemos encontrar un $c \geq 0$ menor que el valor absoluto de cualquier entrada no nula de a' o b' . Como las entradas de a' son las mayores y menores entradas de a , podemos usar el Teorema 2.20 para hallar números $\mu_j, \mu'_j \in [0, 1]$ que satisfacen $\sum_{j=1}^{m+k} \mu_j = \sum_{j=1}^{n+k} \mu'_j = 1$ y $\tau_j \in \mathbb{S}_{m+k}, \tau'_j \in \mathbb{S}_{n+k}$ tales que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+k} \mu_j P_{\tau_j} \left(\alpha_1^+, \dots, \alpha_{p-1}^+, \alpha_p^{+*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-p+k} \right) &= \left(\beta_1^+, \dots, \beta_r^+, \underbrace{c, \dots, c}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-r} \right) \\ \sum_{j=1}^{n+k} \mu'_j P_{\tau'_j} \left(\alpha_1^-, \dots, \alpha_{q-1}^-, \alpha_q^{-*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q+k} \right) &= \left(\beta_1^-, \dots, \beta_s^-, \underbrace{-c, \dots, -c}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-s} \right) \end{aligned}$$

(pues

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i^+ + \alpha_p^{+*} &= \sum_{i=1}^m a'_i = \delta + \sum_{i=1}^m b'_i = ck + \sum_{i=1}^r \beta_i^+, \\ \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i^- + \alpha_q^{-*} &= \sum_{i=m+1}^{m+n} a'_i = -\delta + \sum_{i=m+1}^{m+n} b'_i = -ck + \sum_{i=1}^s \beta_i^-, \end{aligned}$$

y $c < \beta_r^+, c < |\beta_s^-|$, por lo que los vectores de la derecha están bien ordenados).

Por el Lema 3.7 obtenemos para $1 \leq i \leq s$ (donde $s = (m+k)(n+k)$), $\lambda_i, \lambda'_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^s \lambda_i = \sum_{i=1}^s \lambda'_i = 1$ y $\sigma_i, \sigma'_i \in \mathbb{S}_s$ tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i} \left(\alpha_1^+, \dots, \alpha_{p-1}^+, \alpha_p^{+*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-p+k}, \alpha_1^-, \dots, \alpha_{q-1}^-, \alpha_q^{-*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q+k}, 0, \dots \right) \\ = \left(\beta_1^+, \dots, \beta_r^+, \underbrace{c, \dots, c}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-r}, \beta_1^-, \dots, \beta_s^-, \underbrace{-c, \dots, -c}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-s}, 0, \dots \right), \\ \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i} \left(\alpha_1^+, \dots, \alpha_{p-1}^+, \alpha_p^{+*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-p+k}, \alpha_1^-, \dots, \alpha_{q-1}^-, \alpha_q^{-*}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q+k}, 0, \dots \right) \\ = \left(\beta_1^+, \dots, \beta_r^+, \underbrace{-c, \dots, -c}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-r}, \beta_1^-, \dots, \beta_s^-, \underbrace{c, \dots, c}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-s}, 0, \dots \right). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i} \right) a' = b'$. Notemos que

$$\left\| \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i} + \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i} \right) \right\| \leq 1,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma de operadores. En efecto, si $a \in \ell_{\mathbb{R}}^1$ es tal que $\|(a_i)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq 1$ y

$\lambda_i, \lambda'_i, \sigma_i, \sigma'_i$ como antes, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i} + \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i} \right) (a) \right\|_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i}(a) + \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i}(a) \right) \right|_j \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i |P_{\sigma_i}(a)|_j + \sum_{i=1}^s \lambda'_i |P_{\sigma'_i}(a)|_j \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda_i \sum_{j=1}^{\infty} |P_{\sigma_i}(a)|_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda'_i \sum_{j=1}^{\infty} |P_{\sigma'_i}(a)|_j \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \lambda'_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\left\| b - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i} + \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i} \right) a \right\|_1 &\leq \left\| b - b' \right\|_1 + \left\| b' - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i} + \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i} \right) a' \right\|_1 \\
&\quad + \left\| \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_{\sigma_i} + \sum_{i=1}^s \lambda'_i P_{\sigma'_i} \right) (a' - a) \right\|_1 \leq 2\epsilon + 2\epsilon \leq 4\epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^1$.

Podemos describir $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ para $1 < p \leq \infty$ de una manera similar. ■

Proposición 3.9. *Sea a una sucesión en $\ell_{\mathbb{R}}^1$. Entonces $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ con $1 < p \leq \infty$ si y solo si para todo $k \in \mathbb{N}$:*

i) $L_k(b) \leq L_k(a)$.

ii) $L_k(-b) \leq L_k(-a)$.

En particular, $\|b\|_1 \leq \|a\|_1$.

Demostración: $\Rightarrow$) El Lema 3.4 dice que para cada $b \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)$, tenemos i) y ii).

$\Leftarrow$) Sea b que satisface i) y ii). Con la ayuda del Lema 3.6 observamos que

$$\begin{aligned}
\|b\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} b_i^- = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(b^+) + \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(b^-) \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(a^+) + \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(a^-) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \|a\|_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \in \ell_{\mathbb{R}}^1$.

Sea $\epsilon > 0$. Supongamos que podemos hallar b' que satisface i) y ii) y tal que $\|b - b'\|_p < \epsilon$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b'_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Entonces $b' \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^1 \subseteq \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ (por la Proposición 3.8) y entonces

$$\text{dist}\left(b, \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p\right) \leq \epsilon$$

para cada $\epsilon > 0$, con lo cual $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$.

Para construir b' definimos $\delta = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i$. Entonces δ está bien definido y es finito puesto que $b \in \ell_{\mathbb{R}}^1$. Si $\delta = 0$, entonces $b' = b$ y $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$.

Podemos suponer que $\delta > 0$, en caso contrario aplicamos la prueba a $-a$ y $-b$.

Ahora, por hipótesis, sabemos que $L_k(-b) \leq L_k(-a)$ para todo $k \geq 1$ y por el Lema 3.6 $L_k(-b) = L_k(b^-)$, $L_k(-a) = L_k(a^-)$ por lo que $L_k(b^-) \leq L_k(a^-)$ para todo $k \geq 1$ y entonces tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ tenemos $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^- \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$. Por lo tanto,

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} b_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- + \sum_{i=1}^{\infty} b_i^- \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} b_i^+,$$

y entonces $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^+ + \delta \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$.

Sean $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$ las entradas positivas de a y $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots$ las de b . Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i + \frac{\delta}{2} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

y $\beta_{N+1} < \beta_N$ (como $b \in \ell_{\mathbb{R}}^1$, $\beta_i \rightarrow 0$, por lo que existe el N tal que $\beta_{N+1} < \beta_N$). Observemos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left(\underbrace{\frac{\lambda}{n}, \dots, \frac{\lambda}{n}}_n, 0, \dots \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0, \dots)$$

en la norma de $\ell_{\mathbb{R}}^p$ para $1 < p \leq \infty$. Podemos hallar $k \in \mathbb{N}$ con

$$\left\| \left(\underbrace{\frac{\delta}{2k}, \dots, \frac{\delta}{2k}}_k, 0, \dots \right) \right\|_p \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ampliando k , lo cual no viola la condición anterior, tenemos que $\frac{\delta}{2k} \leq \beta_N - \beta_{N+1}$. Podemos hallar $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ tal que $b_{i_j} < \beta_N$ para $j = 1, \dots, k$. Definimos

$$b^1 = (b_i^1)_i, \quad \text{donde} \quad b_i^1 = \begin{cases} b_i + \frac{\delta}{2k} & i \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ b_i & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Las $\beta_1, \dots, \beta_N$ son las N mayores entradas de b^1 , pues esas entradas no fueron cambiadas y $\beta_{N+1} + \frac{\delta}{2k} \leq \beta_N$ (es decir, para todo $n \geq N$, $\beta_n \leq \beta_N$). Sea $E \in \mathcal{C}_l$, $l > N$, entonces

$$L_E(b^1) \leq L_E(b^+) + k \frac{\delta}{2k} \leq \beta_1 + \dots + \beta_l + \frac{\delta}{2} \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_l,$$

y así b^1 sigue cumpliendo la condición i). Y también sigue valiendo la condición ii), pues $(b^1)^- \leq b^-$. Más aún, $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i^1) = \frac{\delta}{2}$ y $\|b - b^1\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Podemos aplicar el mismo procedimiento a b^1 obteniendo b^2 con $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i^2) = \frac{\delta}{4}$ y con $\|b^1 - b^2\| \leq \frac{\epsilon}{4}$. Este b^2 aún satisface las condiciones i) y ii). Continuando de esta manera obtenemos una sucesión $(b^n)_{n \geq 1}$ que satisface las condiciones i) y ii), con $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i^n) = \frac{\delta}{2^n}$ y

$\|b^{n-1} - b^n\|_p \leq \frac{\epsilon}{2^n}$. Esta sucesión es de Cauchy, y entonces converge a algún b' . Como las condiciones *i*) y *ii*) definen un conjunto cerrado, b' satisface las mismas y $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b'_i) = 0$. Por lo tanto, tenemos $b' \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^1$. Además, definiendo $b^0 = b$ tenemos

$$\|b - b'\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|b^{n-1} - b^n\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon,$$

y así tenemos b' como queríamos. ■

Corolario 3.10. Para $a \in \ell_{\mathbb{R}}^1$ tenemos $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p \subseteq \ell_{\mathbb{R}}^1$ y $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p = \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^q$ para $1 < p, q \leq \infty$.

Demostración: Cada $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ cumple que $L_k(b) \leq L_k(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, por lo que $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$ y $b \in \ell_{\mathbb{R}}^1$.
 $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ si y solo si $L_k(b) \leq L_k(a)$ y $L_k(-b) \leq L_k(-a)$ si y solo si $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^q$. ■

Obtenemos a continuación una caracterización de $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ cuando $a \in \ell_{\mathbb{R}}^p$ y de $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$ cuando $a \in c_0$.

Proposición 3.11.

A) Sea $a \in \ell_{\mathbb{R}}^p$ y $b \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ si y solo si para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

- i) $L_k(b) \leq L_k(a)$.
- ii) $L_k(-b) \leq L_k(-a)$.

B) Sea $a \in c_0$ y $b \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$ si y solo si para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

- i) $L_k(b) \leq L_k(a)$.
- ii) $L_k(-b) \leq L_k(-a)$.

Demostración: Para cada $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p$ se verifica *i*) y *ii*) por el Lema 3.4.

Recíprocamente, supongamos que b satisface *i*) y *ii*). Notar que $a, b \in c_0$ en ambos casos. Sean $\beta_1^+ \geq \beta_2^+ \geq \dots$ las entradas positivas de b y $\beta_1^- \leq \beta_2^- \leq \dots$ las negativas y sean $\alpha_1^+ \geq \alpha_2^+ \geq \dots$ y $\alpha_1^- \leq \alpha_2^- \leq \dots$ las de a . Sea $\epsilon > 0$. En el caso A), existen r y s tales que

$$\left(\sum_{i=r}^{\infty} (\beta_i^+)^p \right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \left(\sum_{i=r}^{\infty} (\alpha_i^+)^p \right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

$$\left(\sum_{i=s}^{\infty} (-\beta_i^-)^p \right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{y} \quad \left(\sum_{i=s}^{\infty} (-\alpha_i^-)^p \right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En el caso B) podemos elegir r, s tales que $\alpha_i^+, \beta_i^+ \leq \frac{\epsilon}{2}$ para $i \geq r$ y $\alpha_i^-, \beta_i^- \geq -\frac{\epsilon}{2}$ para $i \geq s$. Definimos unas nuevas sucesiones b' y a' fijando las entradas β_i^+, α_i^+ en 0 para $i \geq r$ y β_i^-, α_i^- en 0 para $i \geq s$.

Entonces $\|b-b'\|_p \leq \epsilon$, $\|a-a'\|_p < \epsilon$. Tenemos que $b', a' \in \ell_{\mathbb{R}}^1$ y que satisface las condiciones i) y ii) puesto que las mayores y menores entradas de a y b no fueron eliminadas. Por la Proposición 3.9 tenemos, para $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, y $\sigma_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ con $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} a' - b' \right\|_p < \epsilon$.

Notemos además que la norma $\ell_{\mathbb{R}}^p$ de operadores de $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}$ es menor o igual que 1, es decir, si $a \in \ell_{\mathbb{R}}^p$ es tal que $\|(a)_i\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i)^p \right)^{1/p} \leq 1$, y λ_i, σ_i como antes, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a) \right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a) \right|_j \right)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^p \left| (P_{\sigma_i}(a))_j \right|^p \right)^{1/p} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| (P_{\sigma_i}(a))_j \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} a - b \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} (a - a') \right\|_p + \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} a' - b' \right\|_p + \|b' - b\|_p < 3\epsilon,$$

lo cual prueba la Proposición. ■

Observación 3.12. El Lema 3.6 implica que si $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$, entonces para cada b' que verifica $b'^+ \leq b^+$ y $b'^- \leq b^-$, donde la relación de orden es componente a componente, tenemos que $b' \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$.

Observación 3.13. Si $a \in c_0$, entonces $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)} \in c_0$. En efecto, si $a \in c_0$ entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ se tiene $|a_n| < \epsilon$.

Sea $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una biyección. Sea el mismo $\epsilon > 0$ y sea $m = \max \{ \sigma^{-1}(j) : j \in \{1, \dots, n_0\} \}$ (el máximo se alcanza pues el conjunto es finito). Entonces, si $i \geq m+1$, tenemos que $\sigma(i) > n_0$. Por lo tanto $|a_{\sigma(i)}| < \epsilon$ para toda $i \geq m+1$, de donde $\sigma(a) \in c_0$ para toda $\sigma \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$, es decir, $\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a \in c_0$. Además, como $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ es Banach, $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}^{\|\cdot\|_{\infty}} \subseteq c_0$ (c_0 es cerrado en $\|\cdot\|_{\infty}$ dentro de $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$).

Observación 3.14.

- i) Por la descripción de la Proposición 3.11 se sigue en particular que si $a \in c_0$, $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$ es cerrada incluso en la topología débil-* de $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ como dual de $\ell_{\mathbb{R}}^1$. En efecto, si tomamos $a_n \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$ tal que $a_n \rightarrow x$ *-débil, entonces veamos que $x \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$. Sea $F \in \mathcal{C}_k$, como $a_n \rightarrow x$ *-débil, para todo $b \in \ell_{\mathbb{R}}^1$, $\varphi_{a_n}(b) \rightarrow \varphi_a(b)$ (donde $\varphi_a(b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$).

Entonces $\varphi_{a_n} \left(\sum_{i \in F} e_i \right) = \sum_{i \in F} (a_n)_i \leq L_k(a_n) \leq L_k(a)$, y además

$$\varphi_{a_n} \left(\sum_{i \in F} e_i \right) \rightarrow \varphi_x \left(\sum_{i \in F} e_i \right) = \sum_{i \in F} x_i = L_F(x),$$

de donde $L_F(x) \leq L_k(a)$ para todo $F \in \mathcal{C}_k$. Por lo tanto, $L_k(x) = \sup_{F \in \mathcal{C}_k} L_F(x) \leq L_k(a)$.

Además

$$-\varphi_{a_n} \left(\sum_{i \in F} e_i \right) = - \sum_{i \in F} (a_n)_i \leq - \inf_{F \in \mathcal{C}_k} \sum_{i \in F} (a_n)_i = \sup_{F \in \mathcal{C}_k} \sum_{i \in F} (-a_n)_i = L_k(-a_n) \leq L_k(-a),$$

y por otro lado $-\varphi_{a_n} \left(\sum_{i \in F} e_i \right) \rightarrow -\varphi_x \left(\sum_{i \in F} e_i \right) = \sum_{i \in F} -x_i = L_F(-x)$, de donde

$$L_k(-x) = \sup_{F \in \mathcal{C}_k} L_F(-x) \leq L_k(-a).$$

Por lo tanto, por la Proposición 3.11, $x \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$.

ii) Para $a \in \ell_{\mathbb{R}}^p$ (respectivamente si $a \in c_0$ tomamos $p = \infty$) tenemos

$$\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}^p = \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\infty}a)}^p$$

donde $\mathbb{S}_{\mathbb{N}\infty} = \bigcup_n \mathbb{S}_n$ y recordemos que $\mathbb{S}_n$ actúa sobre las sucesiones permutando las primeras n entradas.

Ahora estudiaremos los casos donde la sucesión no pertenezcan a c_0 .

Definición 3.15. Se define $\mathcal{F}_n = \left\{ (a_i)_{i \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : na_i \text{ es entero para todo } i \right\}$ y

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n.$$

Notemos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto denso de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. En efecto, para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{1}{n}$ y para cada $a_i \in [0, 1]$ existe $b_i = \frac{m_i}{n} \in \mathcal{F}_n$ con $m_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq m_i \leq n$ tal que $|a_i - b_i| < \epsilon$. Por lo tanto, para cada $a \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ existe un $b \in \mathcal{F}_n$ tal que $\|a - b\| < \epsilon$.

Lema 3.16. Sea $a = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$. Entonces

$$\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)} = [0, 1]^{\mathbb{N}}.$$

Demostración: Que $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)} \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$ es trivial. Vamos a probar la otra inclusión. Para esto, es suficiente probar que $\mathcal{F} \subseteq \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$. Incluso es suficiente considerar únicamente las sucesiones con entradas que no sean 0 ó 1 infinitas veces, ya que éstas forman un subconjunto denso de $\mathcal{F}$. Sea $f \in \mathcal{F}_n$ una de tales sucesiones. Después de permutar, podemos escribir a f como

$$f = \frac{1}{n} \left(a_1, \dots, a_s, \underbrace{m_1, \dots, m_1}_n, \dots, \underbrace{m_k, \dots, m_k}_n, \underbrace{m_1, \dots, m_1}_n, \dots \right)$$

con $a_i, m_t \in \{0, \dots, n\}$ para $1 \leq i \leq s$ y $1 \leq t \leq k$. Entonces $\sum_{i=1}^s a_i = pn + q$ donde $0 \leq p \leq s$ y $0 \leq q < n$ son enteros. Permutamos $a = (1, 0, 1, 0, \dots)$ a las sucesiones

$$a^{(l)} = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p+l}, \underbrace{0, \dots, 0}_{s-p-l}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_1}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_1}, \dots \right)$$

con $l \in \{0, 1\}$. Esto podemos hacerlo pues al menos uno de los m_i es distinto de n o de 0 , entonces tenemos infinitos lugares para poner 1 y 0 .

Así, la sucesión

$$\begin{aligned} a' &= \frac{n-q}{n}a^{(0)} + \frac{q}{n}a^{(1)} \\ &= \left(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{\frac{q}{n}, 0, \dots, 0}_{s-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_1}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_1}, \dots \right) \end{aligned}$$

está en $\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)$.

Consideramos ahora la permutación $\sigma^+ : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$. Entonces

$$(P_{\sigma^+})_t \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_t}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_t} \right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} (P_{\sigma^+})^i \right) \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_t}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_t} \right) = \left(\frac{m_t}{n}, \dots, \frac{m_t}{n} \right).$$

Entonces, por el Lema 3.7, para $1 \leq i \leq w = n^k$, existen $\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^w \lambda_i = 1$ y $(\sigma^+)_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ tales que

$$\begin{aligned} (9) \quad & \sum_{i=1}^w \lambda_i (P_{\sigma^+})_i \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_1}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m_1}, \dots \right) \\ &= \left(\frac{m_1}{n}, \dots, \frac{m_1}{n}, \dots, \frac{m_k}{n}, \dots, \frac{m_k}{n}, \frac{m_1}{n}, \dots, \frac{m_1}{n}, \dots \right). \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.20, para $1 \leq i \leq m$, existen $\mu_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ y $\sigma_i \in \mathbb{S}_s$ tales que

$$(10) \quad \sum_{i=1}^m \mu_i P_{\sigma_i} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{\frac{q}{n}, 0, \dots, 0}_{s-p-1} \right) = \left(\frac{a_1}{n}, \dots, \frac{a_s}{n} \right),$$

pues $p + \frac{q}{n} = \frac{1}{n}(pn + q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s a_i$.

Por el Lema 3.7 para $1 \leq j \leq r = n.w$ existen $\lambda_j \in [0, 1]$ con $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$ y enteros i_j y k_j tales que para la siguiente matriz diagonal de bloques se tiene

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \begin{bmatrix} P_{\sigma_{i_j}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (P_{\sigma^+})_{k_j} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & (P_{\sigma^+})_{k_j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} a' = f$$

(para el primer bloque se usa (10) y para los demás bloques se usa (9) y por lo tanto $f \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a') \subseteq \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)$. ■

Corolario 3.17. Sea $a = (a_i)_{i \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ tal que $\limsup a_i = 1$ y $\liminf a_i = 0$. Entonces

$$\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)} = [0, 1]^{\mathbb{N}}.$$

Demostración: $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)} \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$ es trivial. Veamos la otra inclusión. Para esto, supongamos que $a \in \mathcal{F}$. Entonces a tiene infinitas entradas 0 y 1. Dado un $N > 0$ arbitrario, existe $n > N$ con $a \in \mathcal{F}_n$. Entonces podemos permutar a a:

$$a' = \left(1, \frac{m_1}{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1-1}, 1, \frac{m_2}{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_2-1}, \dots \right)$$

para $0 \leq m_i \leq n$ enteros. Sean $m_1, \dots, m_s$ todos los numeradores posibles. Denotemos por $(1, k)$ la permutación que cambia la primera por la k -ésima entrada y definimos $(1, 1) = \text{id}$. Observemos que

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} (1, i) \left(\frac{m}{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1} \right) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right).$$

Por el Lema 3.7, para $1 \leq i \leq r = \prod_{i=1}^s m_i$ existen $\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ y $\sigma_{i,j} \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ $j = 1, \dots, s$ tales que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i P_{\sigma_{i,j}} \left(\frac{m_j}{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_j-1} \right) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

para todo $1 \leq j \leq s$. Entonces

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & P_{\sigma_{i,1}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_{\sigma_{i,2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} a' = \left(1, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{m_1}, 1, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{m_2}, \dots \right)$$

y entonces por el Lema 3.16, $\left[\frac{1}{n}, 1 \right]^{\mathbb{N}} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$. De modo que tenemos

$$[0, 1]^{\mathbb{N}} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \overline{\left[\frac{1}{N}, 1 \right]^{\mathbb{N}}} \subseteq \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}.$$

Ahora, si a es arbitrario, entonces un argumento de aproximación prueba el Corolario: Dado un $b \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ y sea $\epsilon > 0$, existe un $f \in \mathcal{F}$ con infinitas entradas 0 y 1, tal que $\|a - f\| < \epsilon$. Las consideraciones anteriores producen para $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, y $\sigma_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ tales

que $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} f - b \right\| < \epsilon$. Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} a - b \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} (a - f) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} f - b \right\| \leq 2\epsilon$$

pues $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \right\| \leq 1$ (en efecto, si $a = (a_i)_{i \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ es tal que $\|a\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| \leq 1$, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a) \right\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a) \right|_j \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \lambda_i |P_{\sigma_i}(a)|_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sup_{j \in \mathbb{N}} |P_{\sigma_i}(a)|_j \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

por lo que $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \right\| \leq 1$.

■

Definición 3.18. Sea $a = (a_i)_{i \geq 1} \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$, definimos $A^+ = \limsup a_i$ y $A^- = \liminf a_i$, $\bar{a}_i = \max\{a_i, A^+\} - A^+$ y $\underline{a}_i = \min\{a_i, A^-\} - A^-$ y sea $\bar{a} = (\bar{a}_i)$ y $\underline{a} = (\underline{a}_i)$.

Observación 3.19. Notemos que $\bar{a}, \underline{a} \in c_0$. En efecto, como $A^+ = \limsup a_i$ y $A^- = \liminf a_i$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{a}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (\max\{a_i, A^+\} - A^+) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\max\{a_i - A^+, 0\}) = 0,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{a}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (\min\{a_i, A^-\} - A^-) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\min\{a_i - A^-, 0\}) = 0.$$

Además, $\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \bar{a}) \subset c_0$ y $\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \underline{a}) \subset c_0$.

Observación 3.20. Sea $a = (a_i)_{i \geq 1} \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$, entonces podemos escribir a $a = \underline{a} + d + \bar{a}$, con $d \in [A^-, A^+]$. En efecto:

- Si $a_i \geq A^+$, entonces $\bar{a}_i = a_i - A^+$, con lo que $a_i = 0 + A^+ + \bar{a}_i$.
- Si $a_i \in [A^-, A^+]$, entonces $a_i = 0 + a_i + 0$.
- Si $a_i \leq A^-$, entonces $\underline{a}_i = a_i - A^-$ entonces $a_i = \underline{a}_i + A^- + 0$.

Observación 3.21. Si $a \in c_0$, entonces $L_k(\underline{a}) = 0$ y $L_k(-\bar{a}) = 0$.

Teorema 3.22. Sea $a = (a_i)_{i \geq 1} \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces

$$\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)} = \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \underline{a})} + [A^-, A^+]^{\mathbb{N}} + \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \bar{a})}.$$

Demostración: $\subseteq$) Podemos escribir a $a = \underline{a} + d + \bar{a}$, con $d \in [A^-, A^+]$ por la Observación 3.20.

Sea $b \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)$, entonces para $1 \leq i \leq n$, existen $\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, y $\sigma_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ tales que

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(\underline{a} + d + \bar{a}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_{\sigma_i}(\underline{a}) + P_{\sigma_i}(d) + P_{\sigma_i}(\bar{a})) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(\underline{a}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(d) + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(\bar{a}) \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \underline{a}) + [A^-, A^+] + \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \bar{a}). \end{aligned}$$

Nos resta ver que $\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \underline{a}) + [A^-, A^+]^{\mathbb{N}} + \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \bar{a})$ es cerrado. La parte de que $[A^-, A^+]$ es cerrada es clara, y por la Observación 3.19 $\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \underline{a})$ y $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \bar{a})} \in c_0$, y entonces por la Observación 3.14 i), tenemos que es *-débil cerrado. Además, $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \bar{a})}$ está acotada por $\|\bar{a}\|_{\infty}$ y $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \underline{a})}$ está acotada por $\|\underline{a}\|_{\infty}$. Entonces, por el Teorema de Banach-Alaoglu es *-débil compacta. Y la suma de ambos también es *-débil compacta. En particular, la suma es cerrada en norma.

$\supseteq$) Supongamos primero que $A^+ = A^-$. Notemos que dados $a, b \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ tenemos que

$$b \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a) \quad \text{si y solo si} \quad \text{para todo } \mu \in \mathbb{R}, \quad b + \mu e \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}(a + \mu e))$$

donde $e = (1, 1, \dots)$. En efecto, si $\sigma \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$, entonces $\sigma(a + \mu e) = \sigma(a) + \mu e$, luego sean para $1 \leq i \leq n$, $\sigma_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ y $\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ tales que $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a)$,

$$b + \mu e = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu e = \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_{\sigma_i}(a) + \mu e) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i}(a + \mu e).$$

La otra inclusión es análoga, usando $(b + \mu e) - \mu e$. En particular, si $A^+ = A^- = A$, podemos trasladar a a $a - Ae$ y por lo tanto $a - Ae \in c_0$, es decir $A = 0$.

Sean $b_1 \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\underline{a}})$, $b_2 \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\bar{a}})$ y sea $b = b_1 + b_2$, tenemos que

$$L_k(b) = L_k(b_1 + b_2) \leq L_k(b_1) + L_k(b_2) = L_k(b_2) \leq L_k(\bar{a}) = L_k(a),$$

$$L_k(-b) = L_k(-b_1 - b_2) \leq L_k(-b_1) + L_k(-b_2) = L_k(-b_1) \leq L_k(-\underline{a}) = L_k(-a)$$

(como $b_1 \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\underline{a}}) \in c_0$ tenemos que $0 \leq L_k(b_1) \leq L_k(\underline{a}) = 0$ y como $b_2 \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\bar{a}}) \in c_0$, $0 \leq L_k(-b_2) \leq L_k(-\bar{a}) = 0$ por la Observación 3.21). Entonces por la Proposición 3.11, $b \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}a})$.

Sean $b_1 \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\underline{a}})}$ y $b_2 \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\bar{a}})}$, entonces $b = b_1 + b_2 \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}a})}$. En efecto, existen $b'_n \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\underline{a}})$ tales que $b'_n \xrightarrow{\|\cdot\|} b_1$ y $b''_n \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\bar{a}})$ tales que $b''_n \xrightarrow{\|\cdot\|} b_2$. Sean $b_n = b'_n + b''_n$, para todo $n \geq 1$ tenemos que $L_k(b_n) \leq L_k(a)$, $L_k(-b_n) \leq L_k(-a)$ y entonces, por la Proposición 3.11, $b_n \in \text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}a})$. Además,

$$\|b - b_n\| = \|b_1 + b_2 - (b'_n + b''_n)\| \leq \|b_1 - b'_n\| + \|b_2 - b''_n\| \rightarrow 0,$$

lo que concluye que $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}a})}$.

En el caso que $A^+ \neq A^-$, podemos asumir que $A^+ = 1$ y $A^- = 0$.

Supongamos que tanto la entrada 1 como la entrada 0 está infinitas veces en a y que hay solo finitas entradas fuera de $[0, 1]$. Sean $\alpha_1^+ + 1 \geq \dots \geq \alpha_r^+ + 1$ las entradas mayores que 1 y $\alpha_1^- \leq \dots \leq \alpha_s^-$ las menores que 0.

Por definición tenemos que $a - \underline{a} - \bar{a} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Elegimos $\bar{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\bar{a}})}$, $\underline{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\underline{a}})}$ y $d \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, y sea $b = \underline{b} + d + \bar{b}$. Es suficiente con que veamos estos b para los cuales $\underline{b}$ y $\bar{b}$ tienen solo finitas entradas no nulas y d tiene por lo menos una entrada racional en $(0, 1)$ infinitas veces. Los elementos con estas propiedades están densamente en $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\underline{a}})} + [A^-, A^+]^{\mathbb{N}} + \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\bar{a}})}$.

Sean

$$\bar{b}'_i = \max\{1, b_i\} - 1, \quad \underline{b}'_i = \min\{b_i, 0\} \quad \text{y} \quad \bar{b}' = (\bar{b}'_i)_i, \quad \underline{b}' = (\underline{b}'_i)_i.$$

Entonces $0 \leq \bar{b}' \leq \bar{b}$ y por la Observación 3.12 tenemos que $\bar{b}' \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\bar{a}})}$.

Análogamente, $\underline{b}' \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}\underline{a}})}$ y obviamente $d' = b - \bar{b}' - \underline{b}' \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Si $\bar{b}_i = 0$, entonces $\bar{b}'_i = 0$ (ya que $\max\{1, b_i\} = \max\{1, \underline{b}_i + d_i\} = 1$). Así, $\bar{b}'$ tiene solo finitas entradas no nulas (pues $\bar{b}$ ya tenía solo finitas entradas no nulas. Solo nos aseguramos que las que ya eran 0 no cambien).

Lo mismo vale para $\underline{b}'$ ($\underline{b} = 0$ implica que $\underline{b}' = \min\{b_i, 0\} = \min\{\bar{b}_i + d_i, 0\} = 0$).

La sucesión d' difiere de d solo donde $\bar{b}$ o $\underline{b}$ son no nulas. Como hay solo finitas de estas entradas, d' tendrá las mismas infinitas entradas racionales.

Entonces tendríamos que ver solo los casos donde:

- 1) d tenga por lo menos una entrada racional fuera de $\{0, 1\}$ infinitas veces.
- 2) $\bar{b}$ y $\underline{b}$ tengan solo finitas entradas no nulas.

3) Para cada i , a lo sumo $\underline{b}_i$ o $\overline{b}_i$ puede ser no nula.

4) Si $\underline{b}_i \neq 0$ entonces $d_i = 0$, y si $\overline{b}_i \neq 0$ entonces $d_i = 1$ (pues $\overline{b}'_i = \overline{b}_i - 1 - \underline{b}_i = 0$).

Sea $b = \underline{b} + d + \overline{b}$.

Sean $\beta_1^+ \geq \dots \geq \beta_p^+$ las entradas no nulas de $\overline{b}$ y $\beta_1^- \leq \dots \leq \beta_q^-$ las no nulas de $\underline{b}$ (que son negativas). Entonces sabemos que

$$(\beta_1^+, \dots, \beta_p^+, 0, \dots) \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}(\alpha_1^+, \dots, \alpha_r^+, 0, \dots))}.$$

Por la Proposición 3.11 (puesto que $\overline{b} \in c_0$ lo que implica que para todo $k \geq 1$, $L_k(\overline{b}) \leq L_k(\overline{a})$) deducimos que $0 \leq \delta = \sum_{i=1}^r \alpha_i^+ - \sum_{i=1}^p \beta_i^+$. Análogamente tenemos que $0 \geq \delta' = \sum_{i=1}^s \alpha_i^- - \sum_{i=1}^q \beta_i^-$. Sea $d_0 \in (0, 1)$ una entrada racional de d que aparece infinitas veces. Fijamos $\epsilon > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $nd_0 \in \mathbb{N}$, $nd_0 \geq r - p$, $\frac{\delta}{n} \leq \epsilon$ y $\frac{\delta}{n} \leq 1 - d_0$ (de donde $d_0 + \frac{\delta}{n} \leq 1$). Ahora miremos las sucesiones

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\alpha_1^+ + 1, \dots, \alpha_r^+ + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-r+nd_0}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n(1-d_0)} \right), \\ b'_1 &= \left(\beta_1^+ + 1, \dots, \beta_p^+ + 1, \underbrace{d_0 + \frac{\delta}{n}, \dots, d_0 + \frac{\delta}{n}}_n \right) \\ &\quad \text{y} \\ b_1 &= \left(\beta_1^+ + 1, \dots, \beta_p^+ + 1, \underbrace{d_0, \dots, d_0}_n \right). \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p+n} (a_1)_i &= \sum_{i=1}^r (\alpha_i^+ + 1) + (p - r + nd_0) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^+ + p + nd_0 \\ &= \sum_{i=1}^p \beta_i^+ + \delta + p + nd_0 = \sum_{i=1}^p (\beta_i^+ + 1) + n \left(\frac{\delta}{n} + d_0 \right) = \sum_{i=1}^{p+n} (b'_1)_i. \end{aligned}$$

(en la tercer igualdad usamos que $\sum_{i=1}^r \alpha_i^+ - \sum_{i=1}^p \beta_i^+ = \delta$).

Puesto que $\overline{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \overline{a})}$ tenemos que $L_k(b'_1) \leq L_k(a_1)$ para cada $k \geq 1$. Por el Teorema 2.20 puesto que $\overline{b'_1} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a_1)}$ para cada $1 \leq i \leq p + n$ existen $\lambda_i^+ \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{p+n} \lambda_i^+ = 1$, $\sigma_i^+ \in \mathbb{S}_{p+n}$ tales que $b'_1 = \sum_{i=1}^{p+n} \lambda_i^+ P_{\sigma_i^+} a_1$ y entonces

$$\left\| b_1 - \sum_{i=1}^{p+n} \lambda_i^+ P_{\sigma_i^+} a_1 \right\| = \left\| b_1 - b'_1 \right\| + \left\| b'_1 - \sum_{i=1}^{p+n} \lambda_i^+ P_{\sigma_i^+} a_1 \right\| = \frac{\delta}{n} \leq \epsilon.$$

De la misma manera, podemos hallar $n' \in \mathbb{N}$ con $n'd_0 \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{\delta'}{n'} \right| \leq \epsilon$, $\left| \frac{\delta'}{n'} \right| \leq d_0$ y $n'(1-d_0) \geq s-q$. Sean

$$\begin{aligned} a_2 &= \left(\alpha_1^-, \dots, \alpha_s^-, \underbrace{0, \dots, 0}_{n'(1-d_0)+(q-s)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n'd_0} \right), \\ b'_2 &= \left(\beta_1^-, \dots, \beta_q^-, \underbrace{d_0 + \frac{\delta'}{n'}, \dots, d_0 + \frac{\delta'}{n'}}_{n'} \right) \\ &\quad \text{y} \\ b_2 &= \left(\beta_1^-, \dots, \beta_q^-, \underbrace{d_0, \dots, d_0}_{n'} \right). \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{q+n'} (a_2)_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i^- + n'd_0 = \sum_{i=1}^q \beta_i^- + \delta' + n'd_0 = \sum_{i=1}^q \beta_i^- + n' \left(\frac{\delta'}{n'} + d_0 \right) = \sum_{i=1}^{q+n'} (b'_2)_i,$$

y $\underline{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \underline{a})}$. Entonces por el Teorema 2.20 y puesto que $\underline{b}'_2 \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a_2)}$ para cada $1 \leq i \leq q+n'$ podemos hallar $\lambda_i^- \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{q+n'} \lambda_i^- = 1$ y $\sigma_i^- \in \mathbb{S}_{q+n'}$ que satisfacen que

$$b'_2 = \sum_{i=1}^{q+n'} \lambda_i^- P_{\sigma_i^-} a_2 \text{ y por lo tanto}$$

$$\left\| b_2 - \sum_{i=1}^{q+n'} \lambda_i^- P_{\sigma_i^-} a_2 \right\| = \left\| b_2 - b'_2 \right\| + \left\| b'_2 - \sum_{i=1}^{q+n'} \lambda_i^- P_{\sigma_i^-} a_2 \right\| = \left| \frac{\delta'}{n'} \right| \leq \epsilon.$$

Según nuestras consideraciones previas sabemos que después de una permutación podemos escribir

$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3) \text{ con } a_3, b_3 \in [0, 1]^{\mathbb{N}}, \quad \limsup a_3 = 1 \text{ y } \liminf a_3 = 0.$$

Por el Corolario 3.17, para $1 \leq i \leq m$, existen $\lambda'_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^m \lambda'_i = 1$ y $\sigma'_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ tales que

$$\left\| b_3 - \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} a_3 \right\| \leq \epsilon. \text{ Ahora, usando el Lema 3.7, para } 1 \leq i \leq s \text{ (con } s = n.n'.m), \text{ existen}$$

$\lambda_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ y simultáneamente cambiando los índices de σ_i^+ , σ_i^- y σ'_i tenemos

$$\left\| \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^s \lambda_i \begin{bmatrix} P_{\sigma_i^+} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\sigma_i^-} & 0 \\ 0 & 0 & P_{\sigma'_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon.$$

Esto prueba la afirmación.

Si a no tiene infinitas entradas 0 y 1, y tiene solo finitas entradas fuera de $[0, 1]$, entonces para $\epsilon > 0$ definimos a' por

$$a'_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon], \\ 0 & \text{si } a_i \in [-\epsilon, \epsilon], \\ a_i & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces $\|a - a'\| \leq \epsilon$. En particular concluimos que $\|\underline{a} - \underline{a}'\| \leq \epsilon$ y $\|\bar{a} - \bar{a}'\| \leq \epsilon$.

Elegimos

$$b = \underline{b} + d + \bar{b} \quad \text{en} \quad \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\underline{a})} + [0, 1]^{\mathbb{N}} + \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\bar{a})}.$$

Esto es, tenemos $\underline{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \underline{a}$, (con $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $\sigma_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$), $\bar{b} = \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} \bar{a}$ (con $\mu_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^{n'} \mu_j = 1$ y $\tau_j \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$) y $d \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Como mostramos antes,

$$d + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \underline{a}' + \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} \bar{a}' \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\underline{a}')}$$

Así, podemos hallar $\lambda'_i \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^m \lambda'_i = 1$ y $\sigma'_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ tales que

$$\left\| \left(d + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \underline{a}' + \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} \bar{a}' \right) - \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} \underline{a}' \right\| \leq \epsilon.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \left\| b - \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} a \right\| &= \left\| \left(d + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \underline{a} + \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} \bar{a} \right) - \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} a \right\| \\ &\leq \left\| \left(d + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \underline{a} + \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} \bar{a} \right) - \left(d + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \underline{a}' + \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} \bar{a}' \right) \right\| \\ &\quad + \left\| \left(d + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} \underline{a}' + \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} \bar{a}' \right) - \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} \underline{a}' \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} \underline{a}' - \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} a \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\sigma_i} (\underline{a} - \underline{a}') \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n'} \mu_j P_{\tau_j} (\bar{a} - \bar{a}') \right\| + \epsilon + \left\| \sum_{i=1}^m \lambda'_i P_{\sigma'_i} (a - a') \right\| \leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

y el Teorema sale por la densidad de $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$. ■

Observación 3.23. Como vimos en la prueba del Teorema 3.22, la descomposición

$$b = \underline{b} + d + \bar{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\underline{a})} + [A^-, A^+]^{\mathbb{N}} + \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\bar{a})}$$

no es única. Sin embargo, podemos elegir $\underline{b}$ y $\bar{b}$ tales que $d_i = 0$ si $b_i \neq 0$ y $d_i = 1$ si $\bar{b}_i \neq 0$. La Observación 3.12 nos dice aún más, $\bar{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\bar{a})}$ y $\underline{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\underline{a})}$. Estos $\underline{b}$ y $\bar{b}$ son especiales por ser minimales, esto es, son sucesiones con el menor valor absoluto para cada entrada que aún dan una descomposición válida para b .

Lema 3.24. Sea $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ arbitrario. Usamos la notación de la Definición 3.18. Entonces tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$i) L_k(a) = L_k(\bar{a}) + kA^+.$$

$$ii) L_k(-a) = L_k(-\bar{a}) - kA^-.$$

Además tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}(a) = \limsup a \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k}L_k(-a) = \liminf a.$$

Demostración: La prueba de *i)* y *ii)* es casi la misma que la del Lema 3.6. Para *i)* distinguiremos 2 casos. Si $\bar{a}$ tiene al menos k entradas no nulas, la afirmación se sigue inmediatamente, pues las entradas en donde $\bar{a}$ es no nula, son las mayores entradas de a , y a cada una le restamos A^+ .

Ahora, si $\bar{a}$ tiene solo $l < k$ entradas no nulas, entonces $L_k(\bar{a}) = L_l(\bar{a})$. Sean estas las primera l entradas. Entonces $a_1, \dots, a_l$ son las mayores l entradas de a y cualquier otra entrada de a es menor o igual a A^+ . Así, para cada $E \in \mathcal{C}_f$ tenemos

$$L_E(a) \leq \sum_{i=1}^l a_i + (k-l)A^+ = \sum_{i=1}^l \bar{a}_i + kA^+ = L_l(\bar{a}) + kA^+ = L_k(\bar{a}) + kA^+,$$

de donde $L_k(a) \leq L_k(\bar{a}) + kA^+$.

Pero, por otro lado, para cada $\epsilon > 0$ podemos tomar entradas $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-l}$ de a que están en $\left[A^+ - \frac{\epsilon}{k-l}, A^+\right]$. Entonces

$$\begin{aligned} L_k(a) &\geq \sum_{i=1}^l a_i + \sum_{j=1}^{k-l} \alpha_j \geq \sum_{i=1}^l \bar{a}_i + lA^+ + (k-l)\left(A^+ - \frac{\epsilon}{k-l}\right) \\ &= \sum_{i=1}^l \bar{a}_i + kA^+ - \epsilon = L_k(\bar{a}) + kA^+ - \epsilon, \end{aligned}$$

de donde sale *i)*.

ii) sale de aplicar *i)* a $-a$.

Ahora probaremos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}L_k(a) = \limsup a$.

$\geq$) Para cada $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $L_k(a) \geq k \limsup a - \epsilon$.

$\leq$) Notemos que para cualquier $\epsilon > 0$ existen solo finitas m entradas de a mayores que $\limsup a + \epsilon$. Así, para $k > m$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}L_k(a) &\leq \frac{1}{k} \left[(a_1 + \dots + a_m) + (\limsup a + \epsilon)(k-m) \right] \\ &= \frac{1}{k}(a_1 + \dots + a_m) + \left(1 - \frac{m}{k}\right) (\limsup a + \epsilon) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \limsup a + \epsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba nuestra afirmación.

Usando $\liminf a = -\limsup(-a)$, obtenemos la otra afirmación. ■

Corolario 3.25. Sea $a, b \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$ si y solo si para todo $k \in \mathbb{N}$

$$i) L_k(b) \leq L_k(a).$$

$$ii) L_k(-b) \leq L_k(-a).$$

Demostración: $\Rightarrow$) Es el Lema 3.4.

$\Leftarrow$) Supongamos que b satisface i) y ii). Por el Lema 3.24 tenemos que $\limsup b \leq \limsup a$ (dividiendo por k y pasando al límite) y $\liminf b \geq \liminf a$.

Usaremos la notación del Teorema 3.22. Entonces podemos escribir

$$b = \underline{b} + b' + \bar{b} \quad \text{donde } b' \in [A^-, A^+]^{\mathbb{N}}, \underline{b} \leq 0 \text{ y } \bar{b} \geq 0.$$

Recordando la Observación 3.12, podemos elegir la descomposición tal que

$$\underline{b}_i \neq 0 \quad \text{solo si} \quad b'_i = A^- \quad \text{y} \quad \bar{b}_i \neq 0 \quad \text{solo si} \quad b'_i = A^+.$$

El Lema 3.24 dice que $L_k(a) = L_k(\bar{a}) + kA^+$. Si $\bar{b}$ tiene al menos k entradas no nulas tenemos que $L_k(b) = L_k(\bar{b}) + A^+$ y por tanto

$$L_k(\bar{b}) = L_k(b) - kA^+ \leq L_k(a) - kA^+ = L_k(\bar{a}).$$

Si $\bar{b}$ tiene solo m entradas no nulas y $m < k$ entonces

$$L_k(\bar{b}) = L_m(\bar{b}) \leq L_m(\bar{a}) \leq L_k(\bar{a}).$$

De esta manera, vemos que para cada k , $L_k(\bar{b}) \leq L_k(\bar{a})$.

Puesto que $\bar{b}$ y $\bar{a}$ ambos son positivos, concluimos que $L_k(-\bar{b}) = 0 = L_k(-\bar{a})$. Por la Proposición 3.11 tenemos que $\bar{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\bar{a})}$.

De la misma manera podemos probar que $\underline{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\underline{a})}$. Aplicando el Teorema 3.22 se termina la prueba. ■

Observación 3.26. Miremos el problema inverso, esto es, trataremos de determinar cuales sucesiones dan la misma $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$.

El Teorema 3.22, el Lema 3.24 y el Corolario 3.25 dicen que: $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a_1)} = \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a_2)}$ si y solo si

- i) $\liminf a_1 = \liminf a_2$.
- ii) $\limsup a_1 = \limsup a_2$.
- iii) $L_k(\bar{a}_1) = L_k(\bar{a}_2)$ y $L_k(\underline{a}_1) = L_k(\underline{a}_2)$, $k \in \mathbb{N}$.

La tercera condición solo afecta las entradas que no están en $[A^-, A^+]$. Cada una de estas entrada solo aparecen finitas veces en a_1 o a_2 . Entonces esta condición dice que tales entradas deben aparecer igualmente en a_1 y a_2 . Es también interesante que notemos que las entradas que están en $[A^-, A^+]$ no afectan la forma de $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$.

Los siguiente ejemplos ilustran lo dicho:

Ejemplo 3.27. Sea $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in c_0$ arbitrario. Si $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ tiene entradas que sean 0, se pueden omitir. Entonces las sucesiones:

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2, a_3, \dots), \\ &(0, \dots, 0, a_1, a_2, a_3, \dots), \\ &(0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \dots), \end{aligned}$$

y cada permutación de una de estas sucesiones generan el mismo conjunto $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$. ■

Ejemplo 3.28. Sea $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ arbitrario. Entonces las sucesiones:

$$\begin{aligned} &(3, 2, 2, -1, -2, -2, 1, 0, 1, 0, 1, \dots), \\ &(3, 2, 2, -1, -2, -2, 1, a_1, 0, a_2, 1, a_3, 0, a_4, 1, \dots), \\ &(3, 2, 2, -1, -2, -2, 3/4, 1/4, 7/8, 1/8, 15/16, 1/16, \dots), \end{aligned}$$

y cada permutación de alguna de estas sucesiones generan el mismo conjunto $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$. ■

3.1. El Teorema de Schur-Horn en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Caso diagonalizable.

En la subsección anterior logramos obtener desigualdades con los funcionales L_k que caracterizan a $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$. Usaremos ahora esto, para obtener las posibles diagonales principales aproximadas de los operadores diagonalizables.

Consideremos el espacio de Hilbert $\ell_{\mathbb{C}}^2 = \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N})$ (el cual es unitariamente isomorfo a cada espacio de Hilbert separable). Entonces cada operador $A \in \mathcal{B}(\ell_{\mathbb{C}}^2)$ se puede identificar con su matriz en $M_{\mathbb{N}}$ (Recordemos que denotamos $M_{\mathbb{N}} = M_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ para las matrices de dimensión infinita) en la base canónica de $\ell_{\mathbb{C}}^2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

donde $a_{ij} = (\langle Ae_i, e_j \rangle)_{i,j \geq 1}$. Sea $\mathcal{D}$ el espacio de todas las matrices diagonales acotadas. Entonces $\mathcal{D}$ es isomorfo a $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$, donde $\mathcal{D}$ está dotado con la norma de operadores. Sea p la proyección de la diagonal: $p(A) = (a_{11}, a_{22}, \dots)$. Consideramos p como una función lineal continua para los operadores lineales acotados de $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Para $a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ sea $\text{diag}(a) \in M_{\mathbb{N}}$ la matriz diagonal que está dada por $(\text{diag}(a))_{i,j} = \delta_{ij}a_i$ para todo $i, j \geq 1$. Notemos que $\text{diag}(a)$ induce un operador lineal acotado en $\mathcal{B}(\ell_{\mathbb{C}}^2)$ dado por $\text{diag}_{\beta}(a)e_n = a_n e_n$ para toda $n \geq 1$, donde $\beta = (e_n)_{n \geq 1}$ es la base canónica de $\ell_{\mathbb{C}}^2$.

Sea $\mathcal{U}(n)$ el grupo de isomorfismos unitarios de $\mathbb{C}^n$ y $\mathcal{U}$ el grupo de isomorfismos unitarios de $\ell_{\mathbb{C}}^2$ (cuando $\mathcal{H}$ no sea $\ell_{\mathbb{C}}^2$, lo llamaremos $\mathcal{U}(\mathcal{H})$). Convenimos denotar $U.a = U^* \text{diag}(a)U$ para el producto de las matrices infinitas, es decir, vemos U como la matriz que representa a un isomorfismo unitario en la base canónica de $\ell_{\mathbb{C}}^2$ y $\mathcal{U}.a = \{U.a : U \in \mathcal{U}\}$.

Con estas notaciones, podemos reescribir el Teorema de Schur-Horn de la siguiente manera (ver ítem 1 de la Observación 2.18): Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$p\{U^* \text{diag}(a)U : U \in \mathcal{U}(n)\} = \text{conv}(\mathbb{S}_n a).$$

Buscamos un resultado similar para el caso de dimensión infinita.

Observación 3.29. Sea $d \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces para $U = (u_{ij})_{i,j \geq 1} \in M_{\mathbb{N}}$ unitaria (que representa un isomorfismo unitario) tenemos que $p(U^* \text{diag}(d)U) = Od$ donde O es una matriz doble estocástica ($O_{ij} = |u_{ji}|^2$ para toda $i, j \geq 1$). La prueba es análoga a la del Teorema de Schur-Horn que dimos en Preliminares.

Proposición 3.30. Sea $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ una sucesión arbitraria y D una matriz doble estocástica. Entonces $D.a \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$.

Demostración: Por lo visto anteriormente podemos partir a a en $a = \underline{a} + c + \bar{a}$ donde $\bar{a}$ y $-\underline{a}$ son sucesiones positivas que convergen a 0 y

$$\liminf a = \liminf c \leq c_j \leq \limsup c = \limsup a \quad \text{para todo } j.$$

Sea $D = (d_{ij})_{ij \geq 1}$. Elegimos un $k > 0$. Podemos asumir que $\bar{a}_1 \geq \dots \geq \bar{a}_k$ son las mayores k entradas de $\bar{a}$ (pues $\bar{a} \in c_0$). Entonces para $E \in \mathcal{C}_k$,

$$\begin{aligned} L_E(D\bar{a}) &= \sum_{i \in E} (D\bar{a})_i = \sum_{i \in E} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} \bar{a}_j \leq \sum_{i \in E} \sum_{j=1}^k d_{ij} \bar{a}_j + \sum_{i \in E} \sum_{j=k+1}^{\infty} d_{ij} \bar{a}_k \\ &= \sum_{i \in E} \sum_{j=1}^k d_{ij} \bar{a}_j + \left(\sum_{i \in E} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} \bar{a}_k - \sum_{i \in E} \sum_{j=1}^k d_{ij} \bar{a}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i \in E} d_{ij} \bar{a}_j + k \bar{a}_k - \sum_{j=1}^k \sum_{i \in E} d_{ij} \bar{a}_k = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i \in E} d_{ij} \bar{a}_j + \left(1 - \sum_{i \in E} d_{ij}\right) \bar{a}_k \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^k \bar{a}_j = L_k(\bar{a}). \end{aligned}$$

(notemos que a_k es fijo, que $\sum_{i \in E} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} \bar{a}_j = \sum_{i \in E} \bar{a}_j \left(\sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} \right) = \sum_{i \in E} \bar{a}_k = k a_k$ y que

$\sum_{i \in E} d_{ij} \bar{a}_j + \left(1 - \sum_{i \in E} d_{ij}\right) \bar{a}_k \leq \bar{a}_j$ por ser combinación convexa). Por lo tanto, $D\bar{a} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} \bar{a})}$, ya que $\bar{a}$ tiene las entradas no negativas.

Análogo para $\underline{a}$.

Por otro lado, claramente $Dc \in [\liminf c, \limsup c]^{\mathbb{N}}$. Así, por el Teorema 3.22 queda terminada la prueba. ■

Teorema 3.31. Sea $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces $p(\mathcal{U}.a) \subseteq \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$

Demostración: Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $D \in M_{\mathbb{N}}$ doble estocástica tal que $p(U^* \text{diag}(a)U) = Da$, por la Observación 3.29, y $Da \subseteq \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$ por la Proposición 3.30. ■

Lema 3.32. Sea $a \in c_0(\mathbb{N})$. Entonces $p(\mathcal{U}.a)$ es denso en $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$.

Demostración: Sale directamente del hecho de que para $a \in c_0$ tenemos que

$$\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)} = \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\infty}} a)},$$

por la Observación 3.14 ii) y el Teorema de Schur-Horn. ■

Observación 3.33. Antes de considerar otros casos, notemos el siguiente hecho: Sea A un subconjunto arbitrario de $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ y supongamos que sabemos que para cada $a \in A$ que $p(\mathcal{U}.a)$ es denso en $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$. Entonces lo mismo vale para $a \in \bar{A}$.

En efecto, si fijamos un $a \in \bar{A}$, $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$ y $\epsilon > 0$, entonces para $1 \leq j \leq n$ existen $\lambda_j \in [0, 1]$ con $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, $\sigma_j \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ y $b' = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\sigma_j} a$ con $\|b - b'\| \leq \epsilon$. Podemos hallar un $a' \in A$ con $\|a - a'\| \leq \epsilon$.

Puesto que $a' \in A$, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $\left\| p\left(U^* \text{diag}(a')U\right) - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\sigma_j} a' \right\| \leq \epsilon$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned} \left\| p\left(U^* \text{diag}(a)U\right) - b \right\| &\leq \left\| p\left(U^* \text{diag}(a)U\right) - p\left(U^* \text{diag}(a')U\right) \right\| \\ &\quad + \left\| p\left(U^* \text{diag}(a')U\right) - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\sigma_j} a' \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\sigma_j} a' - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\sigma_j} a \right\| + \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\sigma_j} a - b \right\| \\ &\leq \left\| p\left(U^* \text{diag}(a - a')U\right) \right\| + \epsilon + \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\sigma_j} (a' - a) \right\| + \epsilon \leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

■

Lema 3.34. Sea $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$ tal que

$$A^- = \liminf a \leq a_j \leq A^+ = \limsup a \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Entonces $\overline{p(\mathcal{U}.a)} = [A^-, A^+]^{\mathbb{N}}$.

Demostración: Si $A^- = A^+$ entonces a es constante y entonces $\overline{p(\mathcal{U}.a)} = a$.

Supongamos que $A^- = 0$ y $A^+ = 1$. Por la Observación 3.33, podemos asumir que $a \in \mathcal{F}$ y que tiene infinitas entradas 0 y 1 (por la densidad). Después de una permutación, podemos escribir

$$a = (1, 0, \alpha_1, 1, 0, \alpha_2, 1, 0, \alpha_3, \dots)$$

donde $\alpha_i \in [0, 1]$.

Ahora elegimos $b \in \mathcal{F}$ que no tenga ninguna entrada 0 y tenga al menos una entrada diferente de 1 que se repita infinitas veces. Estas sucesiones forman un subconjunto denso de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, de modo que si podemos probar que cada una de ellas está en $\overline{p(\mathcal{U}.a)}$ ya está.

Sea entonces

$$b = (\beta_1, \dots, \beta_p, n_1, \dots, n_q, n_1, \dots, n_q, \dots).$$

Sea $\epsilon > 0$. Como al menos una entrada que es diferente de 0 y 1 aparece infinitas veces en b , podemos asumir que $n_1 \in (0, 1)$. Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_1 + \dots + \beta_p \leq k\epsilon$. Sea $\delta = \frac{(\beta_1 + \dots + \beta_p)}{k} \leq \epsilon$. Puesto que $b \in \mathcal{F}$ podemos asumir (ampliando k si es necesario) que kn_1 es un entero y que $\delta \leq n_1$. Ahora permutamos a y b para obtener

$$\begin{aligned} a' &= \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{kn_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k+p-kn_1}, 1, 0, \alpha_1, 1, 0, \alpha_2, \dots \right), \\ b' &= \left(\beta_1, \dots, \beta_p, \underbrace{n_1, \dots, n_1}_k, n_1, \dots, n_q, n_1, \dots, n_q, \dots \right). \end{aligned}$$

(Notemos que $\sum_{i=1}^{p+k} a'_i = kn_1 = \beta_1 + \dots + \beta_p + k(n_1 - \delta) = \sum_{i=1}^{p+k} b'_i$ y que $\beta_1 < 1$, $\beta_1 + \beta_2 < 2$, ...)

Podemos entonces aplicar el Teorema de Schur-Horn y obtenemos que existe $U' \in \mathcal{U}(k+p)$ tal que

$$p\left(U'^* \text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{kn_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k+p-kn_1}\right)U'\right) = \left(\beta_1, \dots, \beta_p, \underbrace{n_1 - \delta, \dots, n_1 - \delta}_k\right).$$

Consideramos ahora las sucesiones

$$a'' = (1, 0, \alpha_1, 1, 0, \alpha_2, \dots) \quad \text{y} \quad b'' = (n_1, \dots, n_q, n_1, \dots, n_q, \dots).$$

Sabemos que $b'' \in \mathcal{F}_1$ para algún l . Podemos suponer que $\frac{1}{l} \leq \epsilon$. Entonces existen enteros $0 < m_i \leq l$ tales que $n_i = \frac{m_i}{l}$ (por pertenecer a $\mathcal{F}_1$). Permutamos a'' y b'' para obtener

$$\begin{aligned} a'' &= \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_1-1}, \underbrace{\alpha_1, 0, \dots, 0}_{l-m_1}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_q-1}, \underbrace{\alpha_q, 0, \dots, 0}_{l-m_q}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1-1}, \underbrace{\alpha_{q+1}, 0, \dots, 0}_{l-m_1}, \dots \right), \\ b'' &= \left(\underbrace{n_1, \dots, n_1}_l, \underbrace{n_2, \dots, n_2}_l, \dots, \underbrace{n_q, \dots, n_q}_l, \underbrace{n_1, \dots, n_1}_l, \dots \right). \end{aligned}$$

(Notemos que a'' mayoriza por bloques a b'' , en el sentido que el primer bloque de l elementos de a'' mayoriza el primer bloque de l elementos de b'' , esto se repite en los siguientes bloques de tamaño l). Podemos entonces aplicar el Teorema 2.20 y el Teorema de Schur-Horn de para hallar $U_{s,t} \in \mathcal{U}(m)$ para cada $s, t \in \mathbb{N}$ tales que

$$p\left(U_{s,t}^* \text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_s-1}, \underbrace{\alpha_{s+ tq}, 0, \dots, 0}_{l-m_s}\right) U_{s,t}\right) = \left(n_s - \frac{1 - \alpha_{s+ tq}}{l}, \dots, n_s - \frac{1 - \alpha_{s+ tq}}{l}\right)$$

Puesto que $b \in \mathcal{F}_1$, tenemos que $n_s \geq \frac{1}{l}$ ($n_s = \frac{m_s}{l}$ y m_s es natural, por lo que $n_s \geq \frac{1}{l}$) y así, ninguna entrada es negativa. Formamos

$$U = \begin{bmatrix} U' & & & & \\ & U_{1,1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & U_{q,1} & \\ & & & & U_{1,2} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

obtenemos:

- Si $1 \leq i \leq k + p$,

$$\left| p(U^* \text{diag}(a_i) U) - b_i \right| = |n_1 - (n_1 - \delta)| = \delta \leq \epsilon.$$

- Si $i > k + p$,

$$\begin{aligned} \left| p(U^* \text{diag}(a_i) U) - b_i \right| &= \left| \left(\left(n_1 - \frac{1 - \alpha_{1+1q}}{t} \right) - n_1, \dots, \left(n_s - \frac{1 - \alpha_{s+ tq}}{t} \right) - n_s, \dots \right) \right| \\ &\leq \sup_{s,t} \frac{1 - \alpha_{s+ tq}}{l} \leq \frac{1}{l} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|p(U^* \text{diag}(a) U) - b\| \leq \epsilon$. ■

Teorema 3.35. Sea $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mathbb{N})$. Entonces $p(\mathcal{U}.a)$ es denso en $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}} a)}$.

Demostración: Si a converge, estamos en el caso del Lema 3.32.

Así, podemos suponer que $\limsup a_i = 1$ y $\liminf a_i = 0$. Usaremos la Observación 3.33 y nos restringimos al caso es que a tiene solo finitas entradas a_i con $a_i > 1$ o $a_i < 0$, pero infinitas entradas 1 y 0.

Ahora elegimos un b arbitrario, $b \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$ y un $\epsilon > 0$. El Teorema 3.22 nos dice que

$$b = \underline{b} + d + \bar{b} \quad \text{con} \quad \underline{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\underline{a})}, \quad \bar{b} \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}\bar{a})} \quad \text{y} \quad d \in [0, 1]^{\mathbb{N}}.$$

En particular, tenemos $\limsup b \leq 1$ y $\liminf b \geq 0$.

Elegimos $\underline{b}$ y $\bar{b}$ minimales en el sentido de la Observación 3.23. Además, b tiene al menos una subsucesión $(b_{i_k})_{k \geq 1}$ que converge a algún $B' \in [0, 1]$. Entonces existe un racional $B \in (0, 1)$ con $|B - B'| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Se define b' por

$$b'_i = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i \in [1, 1 + \epsilon], \\ 0 & \text{si } b_i \in [-\epsilon, 0], \\ B & \text{si } b_i \in [B' - \frac{\epsilon}{2}, B' + \frac{\epsilon}{2}], \\ b_i & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por la Proposición 3.11 y la Proposición 3.8, $b' \in \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$, b' tiene solo finitas entradas fuera de $[0, 1]$, una entrada racional B infinitas veces y $\|b' - b\| \leq \epsilon$.

Solo nos queda mostrar que $b \in \overline{p(\mathcal{U}a)}$ para cada b con solo finitas entradas fuera de $[0, 1]$ y solo una entrada racional en $(0, 1)$ infinitas veces. Esto terminará la prueba, puesto que las sucesiones con estas propiedades están densamente en $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$.

Sean $\alpha_1^+ \geq \dots \geq \alpha_r^+$ las entradas no nulas de $\bar{a}$ y $\alpha_1^- \leq \dots \leq \alpha_s^-$ las de $\underline{a}$. Denotemos por $\beta_1^+ \geq \dots \geq \beta_p^+$ y $\beta_1^- \leq \dots \leq \beta_q^-$ las entradas no nulas de $\bar{b}$ y $\underline{b}$. Definimos $\delta = \sum_{i=1}^r \alpha_i^+ - \sum_{i=1}^p \beta_i^+$. Por la Proposición 3.11 y el Teorema 3.22 tenemos que $\delta \geq 0$. Sabemos que existe un $c \in \mathbb{N}$ tal que

$$cB \text{ es entero,} \quad \frac{\delta}{c} \leq \epsilon, \quad \frac{\delta}{c} \leq 1 - B \quad \text{y} \quad cB \geq r - p.$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} a^+ &= \left(\alpha_1^+ + 1, \dots, \alpha_r^+ + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{cB-r+p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{c(1-B)} \right), \\ b^+ &= \left(\beta_1^+ + 1, \dots, \beta_p^+ + 1, \underbrace{B + \frac{\delta}{c}, \dots, B + \frac{\delta}{c}}_c \right). \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.20 y el Teorema de Schur-Horn, que podemos aplicarlos pues

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p+c} (a^+)_i &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^+ + r + cB - r + p \\ &= \delta + \sum_{i=1}^p \beta_i^+ + p + cB = \sum_{i=1}^p \beta_i^+ + p + c(B + \delta) = \sum_{i=1}^{p+c} (b^+)_i, \end{aligned}$$

existe $U_+ \in \mathcal{U}(c+p)$ tal que

$$p(U_+^* \text{diag}(a^+) U_+) = b^+.$$

De la misma manera podemos hallar $c' \in \mathbb{N}$ tal que $c'B$ es un entero y para $\delta' = \sum_{i=1}^s \alpha_i^- - \sum_{i=1}^q \beta_i^- \leq 0$ tenemos que $\frac{|\delta'|}{c'} \leq \epsilon$, $\frac{|\delta'|}{c'} \leq B$ y $c'(1-B) \geq s-q$. Entonces para

$$a^- = \left(\alpha_1^-, \dots, \alpha_s^-, \underbrace{0, \dots, 0}_{c'(1-B)-s+q}, \underbrace{1, \dots, 1}_{c'B} \right),$$

$$b^- = \left(\beta_1^-, \dots, \beta_q^-, \underbrace{B + \frac{\delta'}{c'}, \dots, B + \frac{\delta'}{c'}}_{c'} \right)$$

existe $U_- \in \mathcal{U}(c'+q)$ con $p(U_-^* \text{diag}(a^-) U_-) = b^-$ pues

$$\sum_{i=1}^{q+c'} (a^-)_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i^- + c'B = \delta + \sum_{i=1}^q \beta_i^- + c'B = \sum_{i=1}^q \beta_i^- + c' \left(B + \frac{\delta'}{c'} \right) = \sum_{i=1}^{q+c'} (b^-)_i.$$

Por nuestra elección de a^+, a^-, b^+ y b^- podemos permutar a y b a

$$a = (a^+, a^-, a') \quad \text{y} \quad b = (b^+, b^-, b'),$$

donde $a', b' \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ y $\limsup a' = 1$, $\liminf a' = 0$. Por el Lema 3.34 podemos hallar $U' \in \mathcal{U}$ tal que $\|p(U' \text{diag}(a') U'^*) - b'\| \leq \epsilon$.

Ahora,

$$U = \begin{bmatrix} U_+ & 0 & 0 \\ 0 & U_- & 0 \\ 0 & 0 & U' \end{bmatrix}$$

satisface $\|p(U^* \text{diag}(a) U) - b\| \leq \epsilon$. ■

Teorema 3.36. Sea $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces $\overline{p(\mathcal{U}.a)} = \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$.

Demostración: Por el Teorema 3.31 tenemos que $p(\mathcal{U}.a) \subseteq \overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$, y por el Teorema 3.35 $p(\mathcal{U}.a)$ es denso en $\overline{\text{conv}(\mathbb{S}_{\mathbb{N}}a)}$. ■

Queremos reformular ahora este resultado para operadores. Sea $\mathcal{H}$ un espacio Hilbert separable. Sea $\beta = (e_n)_{n \geq 1}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Recordemos que definimos $E_{\beta} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la función que asigna a un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el operador $\sum_{n \geq 1} \langle A e_n, e_n \rangle e_n \otimes e_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Recordemos además que dada $a \in \ell^{\infty}$ entonces $\text{diag}_{\beta}(a)$ es un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En este caso $E_{\beta}(\text{diag}_{\beta}(a)) = \text{diag}_{\beta}(a)$.

Teorema 3.37 (Teorema de Schur-Horn en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Caso diagonalizable). Sean $a, c \in \ell_{\mathbb{C}}^{\infty}$. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable con base ortonormal β y sea E_{β} la esperanza condicional en la base β . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $\text{diag}_{\beta}(c) \in \overline{E_{\beta}(\{U^* \text{diag}_{\beta}(a) U : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\})}$.
- ii) $L_k(c) \leq L_k(a)$ y $L_k(-c) \leq L_k(a)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

4. Diagonales aproximadas de operadores acotados. Caso general.

En esta sección, desarrollaremos parte del trabajo de Antezana, Massey, Ruiz y Stojanoff [1]. En el mismo, se usa el Teorema 3.37 para conseguir la versión del Teorema de Schur-Horn en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para el caso de un operador autoadjunto general. Las principales herramientas utilizadas son el Teorema de Weyl-von Neumann y las propiedades de operadores aproximadamente unitariamente equivalentes (desarrolladas en la subsección 2.4).

En la sección 3 definimos para una sucesión $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$, $L_k(a) = \sup_{|F|=k} \sum_{i \in F} a_i$.

Primero extenderemos la definición a operadores autoadjuntos arbitrarios en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Nuevamente, denotamos por $\mathcal{P}_k$ al conjunto de proyecciones ortogonales en subespacios de dimensión k de $\mathcal{H}$. Recordemos que durante todo el trabajo, cuando hablamos de proyecciones, nos referimos a proyecciones ortogonales.

Observación 4.1. A partir de ahora, notaremos $\ell^1 = \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N})$ y $\ell^{\infty} = \ell_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{N})$.

Definición 4.2. Dado $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$, definimos para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$L_k(S) = \sup_{P \in \mathcal{P}_k} \text{tr}(SP).$$

Observación 4.3. L_k es unitariamente invariante para $k \in \mathbb{N}$, es decir, $L_k(S) = L_k(U^*SU)$ para todo $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$.

El siguiente resultado afirma que la Definición 4.2 extiende naturalmente la definición de Neumann para operadores diagonales.

Proposición 4.4. Sea $\beta = \{e_n\}_{n \geq 1}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$L_k(\text{diag}_{\beta}(a)) = L_k(a).$$

Para probar esta proposición, antes necesitaremos el siguiente resultado técnico:

Lema 4.5. Sea $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ y denotemos por λ la lista de autovalores positivos de S , contados con multiplicidad (si $\dim R(S) < \infty$, donde $R(S)$ es el rango de S , completamos la sucesión con ceros.) Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Además, si $P \in \mathcal{P}_n$ es la proyección sobre el subespacio generado por un conjunto ortonormal de autovectores de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces $L_n(S) = \text{tr}(SP)$.

Demostración: Sea $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$. Por un lado, es inmediato que si $P \in \mathcal{P}_n$ es la proyección sobre el subespacio generado por un conjunto ortonormal de autovectores de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces

$$L_n(S) = \text{tr}(SP) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Para verificar que $L_n(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ basta probar que si $Q \in \mathcal{P}_n$ entonces $\text{tr}(SQ) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y tomamos $Q = Q^2 = Q^*$ con $\text{tr}(Q) = n$. Sea $\{e_j\}_{j \geq 1}$ la base ortonormal de $\mathcal{H}$ tal que $Se_j = \lambda_j e_j$ donde λ es la lista de autovalores de S . Entonces

$$\begin{aligned}
\text{tr}(SQ) &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle SQe_j, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Qe_j, Se_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Qe_j, \lambda_j e_j \rangle \\
&= n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{\langle Qe_j, e_j \rangle}{n} \right) = n \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j,
\end{aligned}$$

donde $\alpha_j = \frac{\langle Qe_j, e_j \rangle}{n}$ para $j \in \mathbb{N}$.

Primero veamos que para todo $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_j \leq \frac{1}{n}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$. Notemos que $\langle Qe_j, e_j \rangle = \langle Qe_j, Qe_j \rangle = \|Qe_j\|^2$, de donde $0 \leq \langle Qe_j, e_j \rangle \leq 1$ y entonces $0 \leq \frac{\langle Qe_j, e_j \rangle}{n} \leq \frac{1}{n}$. Además, como Q es una proyección tal que $\text{tr}(Q) = n$, entonces existe una base ortonormal $\{f_i\}$ de $\mathcal{H}$ tal que $Qf_i = f_i$ para $1 \leq i \leq n$ y $Qf_i = 0$ para todo $i \geq n+1$. Tenemos además que para cada $j \in \mathbb{N}$, $e_j = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_j, f_i \rangle f_i$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle Qe_j, e_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle Q \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_j, f_i \rangle f_i \right), \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_j, f_i \rangle f_i \right\rangle \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_j, f_i \rangle|^2 \langle Qf_i, f_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n |\langle e_j, f_i \rangle|^2 \langle f_i, f_i \rangle \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, f_i \rangle|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = 1.
\end{aligned}$$

Ahora queremos ver que

$$\text{tr}(SQ) = n \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$

o lo que es igual, que $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} - \alpha_j \right) \lambda_j - \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} - \alpha_j \right) \lambda_n - \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j \\
&= \lambda_n - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_n + \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j \right) \geq \lambda_n - \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_n = 0
\end{aligned}$$

(la primera desigualdad vale pues $\lambda_n \leq \lambda_j$ para toda $1 \leq j \leq n$, para la segunda igualdad usamos que $\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} - \alpha_j \right) \lambda_n = \frac{\lambda_n}{n} \sum_{j=1}^n 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_n = \lambda_n - \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_n$ y para la última desigualdad utilizamos que como $\lambda_j \leq \lambda_n$ para todo $n \leq j$, y entonces $\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_n + \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_n$).

Por lo tanto, $\text{tr}(SQ) \leq \text{tr}(SP) = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ para todo $Q \in \mathcal{P}_n$.

■

En la sección anterior habíamos probado el siguiente resultado (Lema 3.24): Si $a \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ y $A^+ = \limsup a$ y $A^- = \liminf a$,

$$(11) \quad a_i^+ = \max\{a_i, A^+\} - A^+ \quad y \quad a_i^- = \min\{a_i, A^-\} - A^- \quad \text{para } i \in \mathbb{N},$$

entonces para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$(12) \quad L_k(a) = L_k(a^+) + kA^+ \quad y \quad L_k(-a) = L_k(-a^-) - kA^-.$$

El siguiente resultado extiende (12) para operadores autoadjuntos. Este hecho es necesario para probar la Proposición 4.4, pero también es una herramienta básica para tratar con la función L_k .

Recordemos que dado $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$, $\alpha^+(S) = \max \sigma_e(S) = \|S\|_e$ y $\alpha^- = \min \sigma_e(S)$.

Proposición 4.6. *Sea $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$i) \quad L_k(S) = L_k(S^+) + k\alpha^+(S).$$

$$ii) \quad L_k(-S) = L_k(-S_-) - k\alpha_-(S).$$

En particular,

$$(13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k(S)}{k} = \alpha^+(S) = \|S\|_e \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k(-S)}{k} = -\alpha_-(S).$$

Demostración: Denotemos por $\alpha^+ = \alpha^+(S)$ y

$$(14) \quad P_2 = P_2(S) = E[\|S\|_e, \|S\|] = E[\alpha^+, \|S\|],$$

donde E es la medida espectral de S . Recordemos que

$$S^+ = \int_{[\alpha^+, \|S\|]} (t - \alpha^+) dE(t) = (S - \alpha^+)P_2.$$

Entonces $S - S^+ = S(I - P_2) + \alpha^+P_2 \leq \alpha^+I$. Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $Q \in \mathcal{P}_k$,

$$(15) \quad \text{tr}(SQ) = \text{tr}(S^+Q) + \text{tr}((S - S^+)Q) \leq L_k(S^+) + k\alpha^+,$$

lo cual muestra que $L_k(S) \leq L_k(S^+) + k\alpha^+$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para ver la desigualdad inversa, supongamos primero que $\text{tr}(P_2) = \infty$. Denotemos por λ la lista de autovalores de S^+ , elegidos como en el Lema 4.5.

Sea $Q_k \in \mathcal{P}_k$ la proyección sobre el subespacio generado por un conjunto ortonormal de autovectores de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Entonces $Q_k \leq P_2$. Por el Lema 4.5,

$$\text{tr}(SQ_k) = \text{tr}(S^+Q_k) + \text{tr}((S - S^+)Q_k) = \sum_{i=1}^k \lambda_i + k\alpha^+ = L_k(S^+) + k\alpha^+.$$

Por lo tanto, $L_k(S) = L_k(S^+) + k\alpha^+$.

Ahora, supongamos que $\text{tr}(P_2) = r < \infty$. Si $k \leq r$, el mismo argumento que antes muestra que $L_k(S) = L_k(S^+) + k\alpha^+$. Así, sea $k > r$ y tomamos $\epsilon > 0$. Puesto que $P_{\epsilon} = E[\alpha^+ - \epsilon, \alpha^+]$ tiene rango infinito (de otra manera $\|S\|_e \leq \alpha^+ - \epsilon$), podemos tomar $Q \leq P_{\epsilon}$, una proyección de rango $k - r$. Si $Q_k = Q + P_2$, entonces

$$\begin{aligned} L_k(S) &\geq \text{tr}(SQ_k) = \text{tr}(SP_2) + \text{tr}(SQ) \\ &= \text{tr}(S^+) + r\alpha^+ + \text{tr}(SP_{\epsilon}Q) \geq \text{tr}(S^+) + r\alpha^+ + (k - r)(\alpha^+ - \epsilon) \\ &= L_k(S^+) + k\alpha^+ - \epsilon(k - r). \end{aligned}$$

Puesto que ϵ es arbitrario, $L_k(S) = L_k(S^+) + k\alpha^+$.

La fórmula para $L_k(-S)$ se sigue de aplicar el ítem i) a $-S$.

Finalmente, como $S^+ \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$, estos autovalores convergen a cero. De aquí, por el Lema 4.5, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k(S^+)}{k} = 0,$$

y de manera similar para $L_k(-S_-)$. Por lo tanto, (13) vale. ■

Demostración: (de la Proposición 4.4). El resultado se sigue de usar el Lema 4.5, la Proposición 4.6, (12) y las siguientes identidades: Si $S = \text{diag}_\beta(a)$ entonces

i) $\alpha^+(S) = A^+$ y $\alpha_-(S) = A^-$.

ii) $S^+ = \text{diag}_\beta(a^+)$ y $S_- = \text{diag}_\beta(a^-)$, donde a^+ y a^- son definidos como en (11). ■

Definición 4.7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, y β una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces

i) $\mathcal{U}_\mathcal{H}(S) = \{U^*SU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$.

ii) $E[\mathcal{U}_\mathcal{H}(S)] = \{c \in \ell^\infty : \text{diag}_\beta(c) \in E_\beta(\mathcal{U}_\mathcal{H}(S))\}$.

Observación 4.8. Dado $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la definición de $E[\mathcal{U}_\mathcal{H}(S)]$ no depende de la base ortonormal β . En efecto, si β' es otra base ortonormal de $\mathcal{H}$, $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ la función que manda β en β' y $c \in \ell^\infty$ satisface $\text{diag}_\beta(c) = E_\beta(T)$ para algún $T \in \mathcal{U}_\mathcal{H}(S)$, entonces

$$\text{diag}_{\beta'}(c) = U \text{diag}_\beta(c) U^* = U E_\beta(T) U^* = E_{\beta'}(UTU^*) \in E_{\beta'}(\mathcal{U}_\mathcal{H}(S)).$$

Por lo tanto, $\{c \in \ell^\infty : \text{diag}_{\beta'}(c) \in E_{\beta'}(\mathcal{U}_\mathcal{H}(S))\} = E[\mathcal{U}_\mathcal{H}(S)]$.

Dado un operador diagonal $\text{diag}(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$, en la sección anterior mostramos (Corolario 3.25 y Teorema 3.35) que si $c \in \ell^\infty$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $c \in \overline{E[\mathcal{U}_\mathcal{H}(\text{diag}(a))]}$.

ii) $L_k(c) \leq L_k(a)$ y $L_k(-c) \leq L_k(-a)$, $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, nuestro objetivo es generalizar estas equivalencias para todo operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$ (vía una reducción al caso diagonalizable). Necesitamos primero el siguiente resultado sobre operadores aproximadamente unitariamente equivalentes.

Lema 4.9. Sean $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$. Entonces $S \in \overline{(\mathcal{U}_\mathcal{H}(T))^{\|\cdot\|}}$ si y solo si

$$\overline{\mathcal{U}_\mathcal{H}(S)}^{\|\cdot\|} = \overline{\mathcal{U}_\mathcal{H}(T)}^{\|\cdot\|}.$$

En este caso $L_k(S) = L_k(T)$ y $L_k(-S) = L_k(-T)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Si $\{V_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $\|V_n T V_n^* - S\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, entonces

$$\|V_n S V_n^* - T\| = \|V_n^*(S - V_n T V_n^*) V_n\| = \|V_n T V_n^* - S\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

De aquí, $\overline{\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(S)}^{\|\cdot\|} = \overline{\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(T)}^{\|\cdot\|}$. Por la Observación 4.3,

$$L_k(V_n T V_n^*) = L_k(T) \quad \text{y} \quad L_k(-V_n T V_n^*) = L_k(-T)$$

para $n, k \in \mathbb{N}$. Fijando $k \in \mathbb{N}$ tomamos $P \in \mathcal{P}_k$. Entonces

$$\text{tr}(SP) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(V_n T V_n^* P) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L_k(V_n T V_n^*) = L_k(T).$$

De aquí, $L_k(S) \leq L_k(T)$. De manera similar, $L_k(-S) \leq L_k(-T)$. Las desigualdades inversas se siguen del hecho que $V_n^* S V_n \rightarrow T$ cuando $n \rightarrow \infty$. ■

Ahora si, obtenemos el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.10 (Teorema de Schur-Horn en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$). *Sea $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{sa}$ y $c \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

$$i) \quad c \in \overline{E[\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(S)]}.$$

$$ii) \quad L_k(c) \leq L_k(S) \quad \text{y} \quad L_k(-c) \leq L_k(-S) \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Si una de estas condiciones es válida, entonces $\max \sigma_e(S) \geq \limsup c$ y $\min \sigma_e(S) \leq \liminf c$.

Demostración: El caso diagonalizable fue probado antes en el Teorema 3.37. Notar que, para deducir esta formulación necesitamos la Proposición 4.4. Si S no es diagonalizable, por el Teorema 2.67, existe un operador diagonalizable $D \in \overline{\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(S)}^{\|\cdot\|}$. Por el Lema 4.9, $L_k(D) = L_k(S)$ y $L_k(-D) = L_k(-S)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\overline{\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(D)}^{\|\cdot\|} = \overline{\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(S)}^{\|\cdot\|}$. Esto implica que

$$\overline{E[\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(D)]}^{\|\cdot\|_{\infty}} = \overline{E[\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(S)]}^{\|\cdot\|_{\infty}},$$

pues la función $T \mapsto E_{\beta}(T)$ es continua para toda base ortonormal β . Por esto, el caso general se reduce al caso diagonalizable. La observación final se sigue del hecho de que

$$(16) \quad \limsup c = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k(c)}{k} \quad \text{y} \quad \liminf c = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k(-c)}{k}$$

y por (13). ■

5. Diagonales de la clausura en norma 1 de órbitas unitarias.

En la presente sección estudiaremos el trabajo de Arveson y Kadison [4]. En la misma, daremos una generalización del Teorema de Schur-Horn para el caso de operadores positivos de tipo traza, actuando en un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Para esto, primero estudiaremos las órbitas unitarias cerradas en $\mathcal{L}^1$ y las $\mathcal{L}^1$ -equivalencias.

5.1. Clausuras de órbitas unitarias en $\mathcal{L}^1$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$. Recordemos que con $\lambda(A)$ podemos formar una sucesión λ de términos positivos reordenados en forma decreciente, con repeticiones de acuerdo a la multiplicidad, por la Observación 2.43 y tenemos que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = \text{tr}(A) \in [0, \infty]$ y que a tal sucesión la llamamos lista de autovalores de A .

La fórmula anterior muestra que A es de tipo traza si y solo si su lista de autovalores pertenece a ℓ^1 , y el conjunto de todas las listas de autovalores en ℓ^1 es un cono $*$ -débil cerrado, donde la topología $*$ -débil en ℓ^1 deriva de la identificación de ℓ^1 con el dual de c_0 .

La lista de autovalores de A no es una invariante completa para equivalencia unitaria porque no detecta los autovalores cero, excepto cuando A es de rango finito. Por ejemplo, si A tiene infinitos términos λ_k positivos en su espectro y tiene núcleo trivial, entonces A y $A \oplus 0$ (donde 0 es un operador cero en algún espacio de dimensión positiva) no pueden ser unitariamente equivalentes a pesar del hecho que ambos tienen la misma lista de autovalores.

Para el caso operadores tipo traza es descrito como sigue:

Notaciones: Recordemos que $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ es el espacio de Banach de todos los operadores tipo traza en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con respecto a la norma traza $\|A\|_1 = \text{tr}|A|$. Dada una lista de autovalores $\lambda \in \ell^1$, ϑ_λ denota el conjunto de todos los operadores tipo traza en $\mathcal{H}$ teniendo a λ como su lista de autovalores. Dado un operador positivo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\vartheta(A)$ denota la clausura en norma traza de la órbita unitaria de A , es decir, $\vartheta(A) = \overline{\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(A)}^{\|\cdot\|_1}$.

Definición 5.1. Dos operadores tipo traza A, B se dicen que son $\mathcal{L}^1$ -equivalentes si existe una sucesión de operadores unitarios $(U_n)_{n \geq 1}$ tales que $\|A - U_n B U_n^*\|_1 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, o equivalentemente, $\vartheta(A) = \vartheta(B)$.

Proposición 5.2. Sea A un operador tipo traza positivo en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y sea λ su lista de autovalores.

- i) $\vartheta(A)$ es un espacio topológico métrico separable en el cual el grupo unitario de $\mathcal{H}$ actúa mínimamente, es decir, $\{U A U^* : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$ es el menor denso en $\vartheta(A)$.
- ii) $\vartheta(A) = \vartheta_\lambda$; en particular, la lista de autovalores es una invariante completa para $\mathcal{L}^1$ -equivalencia.
- iii) Dos operadores A, B tipo traza positivos son $\mathcal{L}^1$ -equivalentes si y solo si $A \oplus 0$ y $B \oplus 0$ son unitariamente equivalentes, donde 0 denota el operador cero en un espacio de Hilbert de dimensión infinita.
- iv) Si λ tiene solo finitos términos no nulos, entonces ϑ_λ consiste de una órbita unitaria simple $\{U A U^* : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$.

Demostración: i) ϑ_λ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{L}^1$ y, por lo tanto, un espacio métrico completo separable. El hecho de que la órbita para cada punto de $\vartheta(A)$ bajo la acción de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es denso en $\vartheta(A)$ se sigue del hecho de que la $\mathcal{L}^1$ -equivalencia es una relación transitiva.

ii) Sea B otro operador tipo traza positivo con lista de autovalores μ . Tenemos que mostrar que A y B son $\mathcal{L}^1$ -equivalentes si y solo si $\lambda = \mu$. Para la implicación ida se usamos B puede

ser aproximado en la norma de $\mathcal{L}^1$ por operadores unitariamente equivalentes a A , con lo que $A \sim B$ y por el Teorema 2.66 $\sigma(A) = \sigma(B)$, de donde $\lambda = \mu$. Recíprocamente, si A y B son dos operadores tipo traza positivos con la misma lista de autovalores $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$, entonces por el Teorema espectral 2.31 podemos descomponer A y B como sigue: $A = A_n + R_n$, $B = B_n + S_n$ donde A_n y B_n son operadores de rango positivo con lista de autovalores $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots)$ y donde los restos R_n y S_n satisfacen $\|R_n\|_1 = \|S_n\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|$.

Puesto que A_n y B_n son unitariamente equivalentes para cada $n \geq 1$ y como $\|R_n\|_1$ y $\|S_n\|_1$ tienden a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, se sigue que existe una sucesión de operadores unitarios $\{U_n\}_{n \geq 1}$ tales que $\|B - U_n A U_n^*\|_1 \rightarrow 0$.

iii) Es una consecuencia de ii) que afirma que A y B son $\mathcal{L}^1$ -equivalentes si y solo si ellos tienen la misma lista de autovalores. De hecho, es claro que si A y B tienen la misma lista de autovalores λ , es decir $\lambda(A) = \lambda(B)$, entonces $A \oplus 0$ y $B \oplus 0$ son unitariamente equivalentes. Recíprocamente, si $A \oplus 0$ y $B \oplus 0$ son unitariamente equivalentes entonces $\lambda(A \oplus 0) = \lambda(B \oplus 0)$, así mismo $\lambda(A) = \lambda(B)$. En efecto, si $\lambda(A \oplus 0)$ no tiene entradas nulas, entonces tampoco las tendrá $\lambda(A)$ (y análogo para B), por lo que $\lambda(A) = \lambda(A \oplus 0) = \lambda(B \oplus 0) = \lambda(B)$, es decir, $\lambda(A) = \lambda(B)$. Si $\lambda(A \oplus 0)$ tiene entradas nulas, las entradas no nulas de $\lambda(A \oplus 0)$ y las de $\lambda(A)$ coinciden y ambas tienen infinitas entradas nulas, de donde $\lambda(A) = \lambda(A \oplus 0) = \lambda(B \oplus 0) = \lambda(B)$.

Finalmente, notemos que iii) implica iv), puesto que si A es un operador de rango finito con lista de autovalores λ , entonces todos, excepto un número finito de componentes de λ , son 0. Por lo tanto A es unitariamente equivalente a $A \oplus 0$, y en consecuencia, todo operador de ϑ_λ es unitariamente equivalente. ■

5.2. Diagonales de operadores de tipo traza.

El siguiente resultado proporciona una generalización a dimensión infinita del Teorema de Schur-Horn para operadores de tipo traza.

Teorema 5.3. *Sea $\mathcal{A}$ un subálgebra abeliana discreta maximal de von-Neumann en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, sea $E : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}$ la traza que preserva la esperanza condicional en $\mathcal{A}$ y sea $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ una sucesión decreciente en ℓ^1 con términos no negativos. Entonces $E(\vartheta_\lambda)$ consiste de todos los operadores de tipo traza $B \in \mathcal{A}$ cuyas lista de autovalores $p = (p_i)_{i \geq 1}$ satisface*

$$(17) \quad L_k(p) \leq L_k(\lambda), \quad k \geq 1$$

junto con

$$(18) \quad \text{tr}(p) = \text{tr}(\lambda).$$

El Teorema 5.3 se deducirá de la siguiente afirmación más general, que trata sobre las diagonales de los operadores en $\mathcal{K}(\mathcal{H})^+$.

Teorema 5.4. *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un subálgebra abeliana discreta maximal, con la esperanza condicional natural $E : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}$. Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ con lista de autovalores $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$, y sea $B \in \mathcal{K}(\mathcal{A})^+$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) Existe una contracción $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $E(J^* A J) = B$.
- ii) La lista de autovalores $p = (p_i)_{i \geq 1}$ de B satisface $L_k(p) \leq L_k(\lambda)$ para $k \geq 1$.

La demostración de Teorema 5.4 requiere un resultado geométrico, que afirma que si $p = (p_1, \dots, p_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ son dos listas de autovalores finitas que satisfacen las primeras n desigualdades (17), entonces las componentes de λ se pueden reducir a fin de preservar las primeras $n - 1$ desigualdades, consiguiendo la igualdad para n .

Lema 5.5. Sean $p = (p_1, \dots, p_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dos n -uplas decrecientes de números reales no negativos de longitudes $n \geq 1$ satisfaciendo $p \prec \lambda$. Existe una sucesión decreciente $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ tal que $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k$,

$$p_1 + \dots + p_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n$$

$$p_1 + \dots + p_n = \mu_1 + \dots + \mu_n.$$

Demostración: Se hace por inducción. El caso $n = 1$ es evidente.

Fijamos $n \geq 2$ y suponemos que las hipótesis son verdaderas para las $(n - 1)$ -uplas. Sea

$$D = \left\{ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n : \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0 \text{ y } \mu_k \leq \lambda_k, 1 \leq k \leq n \right\}$$

y consideremos el conjunto convexo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$

$$K = \left\{ \mu \in D : L_k(p) \leq L_k(\mu), \quad 1 \leq k \leq n - 1 \right\}.$$

Puesto que $f(x) = x_1 + \dots + x_n$ es un funcional lineal en $\mathbb{R}^n$, $f(K)$ es un intervalo cerrado $I \subseteq \mathbb{R}$. Tenemos que mostrar que $p_1 + \dots + p_n \in I$. Para esto es suficiente probar que existen puntos $x, y \in K$ tales que

$$f(x) \leq p_1 + \dots + p_n \leq f(y).$$

Tomando $y = \lambda \in K$, tenemos que $p_1 + \dots + p_n \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_n = f(y)$.

Para hallar x usamos la hipótesis inductiva para obtener números $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq 0$ satisfaciendo

$$0 \leq \mu_k \leq \lambda_k, \quad L_k(p) \leq L_k(\mu) \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n - 2 \quad \text{y} \quad L_{n-1}(p) = L_{n-1}(\mu).$$

El punto $x = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 0)$ pertenece a K y satisface $f(x) = \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} = p_1 + \dots + p_{n-1} \leq p_1 + \dots + p_n$. ■

Si $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ con lista de autovalores $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ y recordando que $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de todas las proyecciones de dimensión n en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el Lema 4.5 nos dice que

$$(19) \quad \sup_{P \in \mathcal{P}_n} \text{tr}(AP) = \max_{P \in \mathcal{P}_n} \text{tr}(AP) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = L_n(\lambda).$$

Demostración: (del Teorema 5.4) $i) \Rightarrow ii)$ Sea $\{e_n\}_{n \geq 1}$ una base ortonormal para $\mathcal{H}$ con la propiedad que $\langle Be_n, e_n \rangle = p_n$, $n \geq 1$. Para $n \geq 1$, sea $E_n = [e_n]$ la proyección ortogonal sobre $\mathbb{C}^n \cdot e_n$, $n \geq 1$.

Fijando k y escribiendo como E la proyección sobre el espacio generado por $\{e_i : 1 \leq i \leq k\}$ y F la proyección sobre el rango de la contracción positiva JEJ^* . Tenemos que

$$L_k(p) = \text{tr}(BE) = \text{tr}(EJ^*AJ) = \text{tr}(AJEJ^*) \leq \text{tr}(AF)$$

(pues $L_k(p) = p_1 + \dots + p_k = \langle Be_1, e_1 \rangle + \dots + \langle Be_k, e_k \rangle = \langle BEe_1, e_1 \rangle + \dots + \langle BEe_k, e_k \rangle = \text{tr}(BE) = \text{tr}(EB)$ por el Teorema 2.53 y porque $B \in \mathcal{L}^1$, de donde $BE \in \mathcal{L}^1$ y la última desigualdad vale pues como F es la proyección sobre el rango de JEJ^* , entonces $JEJ^* \leq$

F , y como $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$, tenemos $A^{1/2}JEJ^*A^{1/2} \leq A^{1/2}FA^{1/2}$, y por lo tanto $\text{tr}(AJEJ^*) = \text{tr}(A^{1/2}JEJ^*A^{1/2}) \leq \text{tr}(A^{1/2}FA^{1/2}) = \text{tr}(AF)$.

Como F es una proyección de rango a lo sumo k , la estimación (19), implica que

$$\text{tr}(AF) \leq \sup_{\dim F=k} \text{tr}(AF) = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = L_k(\lambda),$$

de donde sale que $L_k(p) \leq L_k(\lambda)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $B \in \mathcal{K}(\mathcal{A})^+$ cuya lista de autovalores p satisface las desigualdades $ii)$ y sea $\{e_n\}_{n \geq 1}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ tal que $E_i = [e_i]$, $i \geq 1$ son las proyecciones minimales de $\mathcal{A}$. Puesto que cada permutación de la base $\{e_n\}$ es implementada por un operador unitario $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfaciendo $WAW^* = \mathcal{A}$, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $Be_k = p_k e_k$, $k \geq 1$.

Construimos una sucesión de operadores $J_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \geq 1$, de la siguiente manera: consideramos la representación espectral de A ,

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \otimes \xi_k$$

donde $\{\xi_i : i \geq 1\}$ es un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$ que consiste de autovectores de A . Fijamos n y sean $\mathcal{H}_n$ es espacio lineal generado por $\{\xi_i : 1 \leq i \leq n\}$ y A_n la restricción de A a $\mathcal{H}_n$. La lista de autovalores de A_n es $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, así por el Lema 5.5 existe una sucesión decreciente $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ satisfaciendo $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k$ para $1 \leq k \leq n$ y $p_1 + \dots + p_k \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$ para cada $1 \leq k \leq n-1$ con la igualdad valiendo para $k = n$. La sucesión μ claramente depende de n pero se puede suprimir de la notación ya que μ pronto desaparecerá.

Consideramos el operador B_n definido sobre $\mathcal{H}_n$ por pedir que $B_n \xi_k = \mu_k \xi_k$, $1 \leq k \leq n$. La lista de autovalores de B_n domina a $(p_1, \dots, p_n)$ como en la hipótesis del Teorema 2.17, por lo tanto, existe una base ortonormal $\{e_i^{(n)} : 1 \leq i \leq n\}$ para $\mathcal{H}_n$ tal que

$$\langle B_n e_k^{(n)}, e_k^{(n)} \rangle = p_k, \quad k \geq 1.$$

Puesto que $0 \leq B_n \leq A_n$, se sigue que

$$p_k \leq \langle A_n e_k^{(n)}, e_k^{(n)} \rangle = \langle A e_k^{(n)}, e_k^{(n)} \rangle, \quad k \geq 1.$$

Sea $J_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el operador definido por $J_n e_k = e_k^{(n)}$ para $k \geq 1$ y $J_n = 0$ en el complemento ortogonal de $[e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}]$.

Se puede construir una sucesión $\{J_i\}_{i \geq 1}$ de isometrías parciales de rango finito en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfacen el sistema de desigualdades

$$(20) \quad p_k \leq \langle A J_n e_k, J_n e_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Puesto que la bola unitaria de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es secuencialmente compacta en esta topología débil de operadores, existe una subsucesión estrictamente creciente $(n_i)_{i \geq 1}$ y una contracción $J_\infty \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle J_{n_j} \mu, \xi \rangle \rightarrow \langle J_\infty \mu, \xi \rangle$ cuando $j \rightarrow \infty$, para cada $\mu, \xi \in \mathcal{H}$ (J_∞ es una contracción, pues para todo y con $\|y\| = 1$, $|\langle J_\infty(x), y \rangle| = \lim_{n_i \rightarrow \infty} |\langle J_{n_i}(x), y \rangle|$, pero $|\langle J_{n_i}(x), y \rangle| \leq \|J_{n_i}(x)\| \|y\| \leq \|x\|$ por ser J_{n_i} isometría parcial de rango finito, entonces $|\langle J_{n_i}(x), y \rangle| \leq \|x\|$, de donde $\|J_\infty(x)\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle J_\infty(x), y \rangle| \leq \|x\|$). Afirmamos que J_∞ satisface

$$(21) \quad p_k \leq \langle A J_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle, \quad k \geq 1.$$

Para ver esto, fijemos el k y notemos que para cada j suficientemente grande, (20) implica $p_k \leq \langle AJ_{n_j}e_k, J_{n_j}e_k \rangle$. Cuando $j \rightarrow \infty$, $J_{n_j}e_k$ tiende a $J_\infty e_k$ en la topología débil de $\mathcal{H}$, es decir, $\langle J_{n_j}e_k, \xi \rangle \rightarrow \langle J_\infty e_k, \xi \rangle$ para toda $\xi \in \mathcal{H}$. Puesto que A es un operador compacto,

$$\|AJ_{n_j}e_k - AJ_\infty e_k\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \rightarrow \infty,$$

es decir,

$$\begin{aligned} \langle AJ_{n_j}e_k - AJ_\infty e_k, AJ_{n_j}e_k - AJ_\infty e_k \rangle &= \langle AJ_{n_j}e_k, J_{n_j}e_k \rangle - \langle J_\infty e_k, AJ_{n_j}e_k \rangle \\ &\quad - \langle AJ_{n_j}e_k, J_\infty e_k \rangle + \langle J_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por lo tanto el producto interior $\langle AJ_{n_j}e_k, J_{n_j}e_k \rangle$ converge a $\langle AJ_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle$ pues

$$\begin{aligned} \langle AJ_{n_j}e_k, J_{n_j}e_k \rangle - \langle AJ_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle &= \langle AJ_{n_j}e_k, J_{n_j}e_k \rangle - \langle J_\infty e_k, AJ_{n_j}e_k \rangle + \langle J_\infty e_k, AJ_{n_j}e_k \rangle \\ &\quad - \langle AJ_{n_j}e_k, J_\infty e_k \rangle + \langle AJ_{n_j}e_k, J_\infty e_k \rangle + \langle J_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle \\ &\quad - \langle J_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle - \langle J_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle \\ &= \langle AJ_{n_j}e_k - AJ_\infty e_k, AJ_{n_j}e_k - AJ_\infty e_k \rangle + \langle J_\infty e_k, AJ_{n_j}e_k \rangle \\ &\quad + \langle AJ_{n_j}e_k, J_\infty e_k \rangle - 2\langle J_\infty e_k, J_\infty e_k \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

y sale la desigualdad (21) que afirmamos.

Finalmente elegimos $\{t_i\}_{i \geq 1} \in [0, 1]$ tales que $p_k = t_k \langle AJ_\infty \mu_k, J_\infty \mu_k \rangle$ para cada k . Llamando $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a la contracción definida por $De_k = \sqrt{t_k} e_k$, $k \geq 1$, se encuentra que el operador $J = J_\infty D$ satisface $\langle J^* A J e_k, e_k \rangle = p_k$, $k \geq 1$ y entonces se sigue la fórmula requerida

$$E(J^* A J) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k J^* A J E_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k E_k = B.$$

■

Demostración: (del Teorema 5.3) Sean, para $i \geq 1$, E_i las proyecciones minimales de $\mathcal{A}$ y sean $\{e_i\}_{i \geq 1}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ tal que E_k es la proyección $[e_k]$, $k \geq 1$.

Primero mostraremos que para cada operador de tipo traza $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con lista de autovalores λ , la lista de autovalores $p = (p_n)_{n \geq 1}$ de $B = E(A)$ ($p_n = \langle Ae_n, e_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$) debe cumplir que $L_n(p) \leq L_n(\lambda)$, $n \geq 1$ y $\text{tr}(p) = \text{tr}(\lambda)$. Permutando los elementos de la base $\{e_k\}$ apropiadamente y renombrando los e_k se puede asumir que $Be_k = p_k e_k$, $k \geq 1$.

Sea $P_n = \sum_{k=1}^n E_k$ la proyección sobre $[e_1, \dots, e_n]$. Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\text{tr}(AE_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle AE_k e_i, e_i \rangle = \langle AE_k e_k, e_k \rangle = \langle Ae_k, e_k \rangle,$$

entonces $\text{tr}(AP_n) = \text{tr}\left(A \sum_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n (\text{tr}(AE_k)) = \sum_{k=1}^n \langle Ae_k, e_k \rangle$. Como además A es un operador compacto con lista de autovalores λ , se puede usar (19) para escribir

$$L_n(p) = p_1 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n \langle Ae_k, e_k \rangle = \text{tr}(AP_n) \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_n = L_n(\lambda).$$

Además, $\text{tr}(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Ae_i, e_i \rangle = \text{tr}(A) = \text{tr}(\lambda)$.

Recíprocamente, sean p y λ dos listas de autovalores sumables que satisfacen (17) y (18), y sea B un operador positivo de tipo traza en $\mathcal{A}$ con lista de autovalores p .

Una vez más, renombrando la base ortonormal $\{e_k\}$, se puede asumir que

$$Be_k = p_k e_k, \quad k \geq 1.$$

Elegimos cualquier operador positivo de tipo traza $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ teniendo la lista de autovalores λ , y sea P la proyección sobre la clausura de $A\mathcal{H}$. El Teorema 5.4 implica que existe una contracción $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfaciendo

$$p_k = \langle AJe_k, Je_k \rangle \text{ para } k \geq 1.$$

Cambiando J con PJ si es necesario (pues $\langle AJe_k, Je_k \rangle = \langle PAPJe_k, Je_k \rangle = \langle APJe_k, PJe_k \rangle$) se puede también asumir que $J\mathcal{H}$ está contenido en $P\mathcal{H}$, y en este caso se afirma:

$$(22) \quad JJ^* = P.$$

En efecto, primero veamos que $P - JJ^* \geq 0$. Como J es una contracción cuyo rango está contenido en $P\mathcal{H}$ y usando $J = PJ$, tenemos $JJ^* = PJ(PJ)^* = PJJ^*P$ (pues $P^* = P = P^2$). Además

$$JJ^* \leq \|JJ^*\|I = \|J^*\|^2 I = \|J\|^2 I \leq I,$$

es decir, $JJ^* \leq I$ de donde tenemos que $JJ^* = P(JJ^*)P \leq PIP = P$.

Ahora notemos que si $A^{1/2}(P - JJ^*)A^{1/2} = 0$ entonces $P - JJ^* = 0$. En efecto, si $A^{1/2}(P - JJ^*)A^{1/2} = 0$, entonces para toda $x \in \mathcal{H}$ tenemos que $\langle A^{1/2}(P - JJ^*)A^{1/2}x, x \rangle = 0$. En particular, para $A^{1/2}x$ tenemos $0 = \langle A^{1/2}(P - JJ^*)A^{1/2}A^{1/2}x, A^{1/2}x \rangle = \langle (P - JJ^*)Ax, Ax \rangle$ y como $P - JJ^* \geq 0$, $(P - JJ^*)Ax = 0$ (Si $B \geq 0$ y $\langle Bx, x \rangle = 0$, entonces $Bx = 0$). Por lo tanto $(P - JJ^*)(\overline{A\mathcal{H}}) = 0$ y como $R(P - JJ^*) \subset P(\mathcal{H}) = \overline{A\mathcal{H}}$ y $\ker(P - JJ^*) = R(P - JJ^*)^\perp = \overline{A\mathcal{H}}^\perp$, entonces $P - JJ^*$ (donde $R(P - JJ^*)$ es el rango de $(P - JJ^*)$).

Entonces basta mostrar que el operador positivo $A^{1/2}(P - JJ^*)A^{1/2} = A - A^{1/2}JJ^*A^{1/2}$ tiene traza cero (ya que si $A \geq 0$ y $\text{tr}(A) = 0$, entonces $A = 0$), o equivalentemente,

$$\text{tr}(A^{1/2}JJ^*A^{1/2}) = \text{tr}(A).$$

Ahora tenemos que

$$\text{tr}(A^{1/2}JJ^*A^{1/2}) = \text{tr}(J^*AJ) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle AJe_n, Je_n \rangle = \text{tr}(p) = \text{tr}(\lambda) = \text{tr}(A).$$

(pues $\text{tr}(A^{1/2}JJ^*A^{1/2}) = \text{tr}(J^*A^{1/2}A^{1/2}J) = \text{tr}(J^*AJ)$). Por lo tanto, nuestra afirmación (22) es verdadera.

Ahora, J es una coisometría por (22), entonces se puede cambiar un por isomorfismo isométrico suyectivo $U : \mathcal{H} \rightarrow P\mathcal{H} \oplus \ker J$ usando la proyección $Q : \mathcal{H} \rightarrow \ker J$ como sigue:

$$U\xi = J\xi \oplus Q\xi, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ahora consideremos el operador $A_0 \oplus 0 \in \mathcal{B}(P\mathcal{H} \oplus \ker J)$, con A_0 denotando la restricción de A a $P\mathcal{H} = \overline{A\mathcal{H}}$. Puesto que $Ue_k = Je_k \oplus Qe_k = Je_k \oplus 0$, $k \geq 1$, tenemos

$$\langle (A_0 \oplus 0)Ue_k, Ue_k \rangle = \langle AJe_k, Je_k \rangle = p_k, \quad k \geq 1.$$

Entonces $U^*(A_0 \oplus 0)U$ es un operador positivo de tipo traza en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfaciendo

$$E(U^*(A_0 \oplus 0)U) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k E_k = B.$$

Como, por la Proposición 5.2 iii), $U^*(A_0 \oplus 0)U$ tiene la misma lista de autovalores que A , la misma Proposición 5.2 ii) implica que debe pertenecer a $\vartheta(A) = \vartheta_\lambda$. ■

A continuación veremos un ejemplo que muestra que en general $E\left(\overline{\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}}^{\|\cdot\|_1}\right)$ está estrictamente incluido en $E\left(\overline{\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}}\right)$.

Ejemplo 5.6. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\lambda(A) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 1}$.

$$0 \in \overline{E\left(\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}\right)}, \quad \text{pero} \quad 0 \notin E\left(\overline{\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}}^{\|\cdot\|_1}\right).$$

Primero notemos que $A \in \mathcal{L}^1$, pues $\text{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$.

Tenemos que, $L_k(0) = 0 \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} = L_k(A)$ y $L_k(-0) = 0 \leq 0 = L_k(-A)$.

Por otro lado, $\text{tr}(0) = 0 \neq \text{tr}(A)$.

Por lo tanto, por el Teorema 3.37, tenemos que $0 \in \overline{E\left(\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}\right)}$, en cambio, por el Teorema 5.3, $0 \notin E\left(\overline{\{U^*AU : U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}}^{\|\cdot\|_1}\right)$. ■

Sea ahora el espacio de Hilbert ℓ^2 y $\{e_k\}_{k \geq 1}$ la base ortonormal canónica. Dado $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ lo identificaremos con su matriz asociada en la base canónica.

Corolario 5.7. Sea la sucesión $p = (p_k)_{k \geq 1}$ con $0 \leq p_k \leq 1$ para todo $k \geq 1$, y sea m un entero positivo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Existe una proyección $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ de rango m , cuya matriz de representación en la base canónica tiene a p en su diagonal.

ii) $\text{tr}(p) = m$.

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$ Como $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ es una proyección de rango m (de donde su lista de autovalores es $\lambda = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_m, 0, \dots\right)$) existe una base ortonormal $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ tal que $P\xi_k = \xi_k$ para

$1 \leq k \leq m$ y $P\xi_k = 0$ para todo $k > m$. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \langle P\xi_k, \xi_k \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \xi_k, \xi_k \rangle = m$, de donde tenemos que $P \in \mathcal{L}^1$, y entonces por la Observación 2.50 tenemos que la traza es independiente de la base ortonormal elegida. Por lo tanto,

$$\text{tr}(p) = p_1 + p_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Pe_i, e_i \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle P\xi_k, \xi_k \rangle = m.$$

$ii) \Rightarrow i)$ Como $\text{tr}(p) = m < \infty$, entonces la sucesión $p_k \rightarrow 0$. Además $p_k \geq 0$ y las permutaciones de $\mathbb{N}$ son implementadas por operadores unitarios en $\ell^2(\mathbb{N})$, con lo que podemos considerar solo el caso de que p sea una sucesión decreciente.

La lista de autovalores de una proyección de rango m es

$$\lambda = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_m, 0, \dots\right)$$

y ϑ_λ consiste de todas las proyecciones de rango m en $\mathcal{B}(\ell^2)$, por el cálculo funcional. La hipótesis *ii*), junto con $0 \leq p_k \leq 1$ implican que $L_n(p) \leq L_n(\lambda)$ vale para cada $n \geq 1$. Por lo tanto, el Teorema 5.3 implica que existe un operador en ϑ_λ con la sucesión p en la diagonal. ■

Observación 5.8. De forma similar se puede probar el siguiente enunciado:

Sea $p = (p_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de números en el intervalo unitario $0 \leq p_k \leq 1$, y sea m un entero positivo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Existe una proyección $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ tal que el rango de $1 - P = m$, cuya matriz de representación en la base canónica de ℓ^2 tiene a p en su diagonal.

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - p_i) = m$.

6. Diagonales de proyecciones

En la presente sección estudiaremos parte de los trabajos de Kadison [7] y [8]. El resultado más importante obtenido aquí, es la caracterización por medio de condiciones necesarias y suficientes, de las sucesiones $a = (a_n)_{n \geq 1} \subset [0, 1]$ que son diagonales principales de proyecciones ortogonales.

Proposición 6.1. *Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión n con $\{e_1, \dots, e_n\}$ como base ortonormal, sean $\mathcal{H}_0$ un subespacio de $\mathcal{H}$ de dimensión m y $\mathcal{H}'_0$ su complemento ortogonal.*

Si a es la suma de los cuadrados de las longitudes de las proyecciones de r elementos de la base sobre $\mathcal{H}_0$, y b es la suma de los cuadrados de las longitudes de las proyecciones de los restantes $n - r$ elementos de la base sobre $\mathcal{H}'_0$, entonces

$$a - b = m - n + r.$$

Demostración: Sean $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $\{f_i : 1 \leq i \leq m\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_0$ y $\{f_i : m + 1 \leq i \leq n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}'_0$.

La proyección y_j de e_j en $\mathcal{H}_0$ es $\sum_{k=1}^m \langle e_j, f_k \rangle f_k$, entonces $\|y_j\|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2$. Por lo tanto,

$$a = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2.$$

La proyección z_j de e_j en $\mathcal{H}'_0$ es $\sum_{k=m+1}^n \langle e_j, f_k \rangle f_k$ entonces

$$\|z_j\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\langle e_j, f_k \rangle|^2 = 1 - \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2$$

pues $1 = \|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle e_j, f_k \rangle|^2$ (por la ecuación de Parseval). Por lo tanto,

$$b = \sum_{j=r+1}^n \left(1 - \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2\right) = n - (r + 1) + 1 - \sum_{j=r+1}^n \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2$$

y

$$\begin{aligned} a - b &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2 - n + r + \sum_{j=r+1}^n \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |\langle e_j, f_k \rangle|^2 - n + r = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |\langle e_j, f_k \rangle|^2 - n + r = m - n + r. \end{aligned}$$

(donde la última igualdad vale pues $\sum_{j=1}^n |\langle e_j, f_k \rangle|^2 = \|f_k\|^2 = 1$). ■

Notación: Dada una sucesión $(a_j)_{j \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, le asociamos dos sucesiones definidas de la siguiente manera: $(a'_j)_{j \geq 1}$ son los a_j que pertenecen a $(1/2, 1]^{\mathbb{N}}$ y $(a''_j)_{j \geq 1}$ los que pertenecen a $[0, 1/2]^{\mathbb{N}}$ (Las sucesiones pueden ser finitas o infinitas).

Teorema 6.2. Sea una base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $(a_j)_{j \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ una sucesión dada.

Sean $(a'_j)_{j \geq 1}$ y $(a''_j)_{j \geq 1}$ las sucesiones definidas antes y se definen

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} a''_j, \quad y \quad b = \sum_{j=1}^{\infty} 1 - a'_j.$$

Entonces existe un subespacio de dimensión infinita ν de $\mathcal{H}$, con complemento de dimensión infinita, tal que $\|Fe_j\|^2 = a_j$ para cada j , donde F es la proyección ortogonal con rango ν si y solo si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} 1 - a_j$ divergen y se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i) a o b es infinito.

ii) ambos son finitos y $a - b$ es un entero.

Demostración: Sea $(a_i)_{i \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Si $\{e_i\}_{i \geq 1}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, nos podemos restringir al conjunto de los e_j para los cuales $a_i \in (0, 1)$. En efecto, si definimos $I = \{i \in \mathbb{N} : a_i \in (0, 1)\}$ y $\mathcal{H}_{\{0,1\}} = \text{span}\{e_i : i \in I\}$, podemos escribir $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\{0,1\}} \oplus \mathcal{H}_{\{0,1\}}^{\perp}$, donde $\{e_i\}_{i \notin I}$ es la base ortonormal de $\mathcal{H}_{\{0,1\}}^{\perp}$. Entonces, si construimos la proyección ortogonal $F_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\{0,1\}}^{\perp})$ la podemos extender a $\mathcal{H}$ de la siguiente manera: Sea $F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $F_1 = \sum_{i \in I: a_i=1} e_i \otimes e_i$, $F_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\{0,1\}})$. Entonces $F = F^* = F^2$ es la proyección buscada.

Si $\{\mathbb{N}_j : j \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son dos a dos disjuntos y su unión es $\mathbb{N}$, tales que para cada $j \in \mathbb{N}$ se puede hallar una proyección E_j cuyo rango está contenido en el subespacio cerrado generado por $\{e_n : n \in \mathbb{N}_j\}$ que cumple que

$$\begin{aligned} \|E_j e_n\|^2 &= a_n \text{ para } n \in \mathbb{N}_j & y \\ E_j e_m &= 0 \text{ para cualquier otro } e_m, \end{aligned}$$

entonces $F = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$ es una proyección tal que $\|Fe_j\|^2 = a_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Construiremos ahora tales conjuntos:

Sean

$$\mathbb{N}' = \left\{ j \in \mathbb{N} : a_j \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right\} \quad y \quad \mathbb{N}'' = \left\{ j \in \mathbb{N} : a_j \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Primero veremos que i) implica la existencia de ν y F . Para eso, suponemos que $a = \infty$.

Sea $n(1)$ el menor natural n para el cual $a'_1 + a''_1 + a''_2 + \dots + a''_n \geq 3$. Puesto que $a'_1 < 1$ y cada $a''_j \leq \frac{1}{2}$, tenemos que $n(1) \geq 5$.

Sean $b_1 = a''_1$ y $b_2, \dots, b_{n(1)}$ los $\{a''_2, \dots, a''_n\}$ reordenados en forma decreciente. Sea $m(1)$ el menor natural tal que $a'_1 + b_1 + \dots + b_m \geq 3$, de donde tenemos que

$$5 \leq m(1) \leq n(1) \quad y \quad a'_1 + \sum_{j=1}^{m(1)-1} b_j < 3$$

($m(1)$ puede llegar a ser menor que $n(1)$, ya que al estar reordenados y al sumar primero los mayores puede hacer falta sumar menos b_j para superar 3).

Sean $\tilde{a} = 3 - a'_1 - \sum_{j=1}^{m(1)-1} b_j$, $b'_{m(1)-1} = b_{m(1)-1} + \tilde{a}$ y $b'_{m(1)} = b_{m(1)} - \tilde{a}$.

Entonces

$$a'_1 + \sum_{j=1}^{m(1)-2} b_j + b'_{m(1)-1} = 3$$

y

$$0 \leq b'_{m(1)} < b_{m(1)} \leq b_{m(1)-1} < b'_{m(1)-1} \leq 1.$$

(Para la primera desigualdad usamos que $a'_1 + \sum_{j=1}^{m(1)} b_j \geq 3$, de donde

$$b_{m(1)} \geq 3 - a'_1 - \sum_{j=1}^{m(1)-1} b_j = \tilde{a}.$$

Para la última desigualdad usamos que tanto $b_{m(1)}$, como $b_{m(1)-1}$ es alguno de los a''_j ($\leq 1/2$), por lo que $b'_{m(1)-1} = b_{m(1)-1} + \tilde{a} \leq b_{m(1)-1} + b_{m(1)} \leq 1$.

Sea $\mathbb{N}_1$ el conjunto de todos los índices de a_j en $\{a'_1, a''_1, \dots, a''_{n(1)}\}$ que corresponden a $\{a'_1, b_1, \dots, b_{m(1)-1}\}$ (recordar que $\{b_1, \dots, b_{n(1)}\}$ son los $\{a''_1, \dots, a''_{n(1)}\}$ reordenados). Sea $j(1)$ el índice de a_j en $\{a''_1, \dots, a''_{n(1)}\}$ que $b_{m(1)}$ representa, $j(2)$ el índice de a_j que a'_2 representa y $j(3), j(4), \dots$ los demás números en $\mathbb{N}'' - \mathbb{N}_1$ en orden creciente.

Sea $n(2)$ el menor natural n tal que

$$a'_2 + b'_{m(1)} + \sum_{k=3}^n a_{j(k)} \geq 3.$$

Sea $c_1 = b'_{m(1)}$, $c_2 = a'_2$, $c_3 = a_{j(3)}$ (de esta manera, al elegir $c_3 = a_{j(3)}$ nos aseguramos que todos los a_j sean usados, por más pequeños que sean) y $\{c_4, \dots, c_{n(2)}\}$ los $\{a_{j(4)}, \dots, a_{j(n(2))}\}$ reordenados de forma decreciente. Notar que el menor número de $\mathbb{N}'' - \mathbb{N}_1$ es $j(1)$ o $j(3)$ (el $j(1)$ había quedado de los anteriores y correspondía a $m(1)$, el $j(2)$ no está en $\mathbb{N}''$ y $j(3)$ es el primero de los no usados. Si $m(1) < n(1)$, sobraron a''_j con índice menor que $m(1)$).

Sea $m(2)$ el menor natural m tal que $\sum_{j=1}^m c_j \geq 3$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{m(2)-1} c_j < 3, \quad m(2) \leq n(2) \quad \text{y} \quad m(2) \geq 5.$$

Sea $\tilde{b} = 3 - \sum_{j=1}^{m(2)-1} c_j$, $c'_{m(2)-1} = c_{m(2)-1} + \tilde{b}$ y $c'_{m(2)} = c_{m(2)} - \tilde{b}$.

Notemos que $0 < \tilde{b} \leq c_{m(2)} \leq \frac{1}{2}$, de donde

$$0 \leq c'_{m(2)} < c_{m(2)} \leq c_{m(2)-1} < c'_{m(2)-1} \leq 1.$$

Repetimos este proceso, tomando $\mathbb{N}_2$ como $j(1), j(2)$ y el conjunto de todos los índices de a_j en $\{a_{j(3)}, \dots, a_{j(n(2))}\}$ correspondientes a $\{c_3, \dots, c_{m(2)-1}\}$. Sea $k(1)$ el índice de a_j en $\{a_{j(1)}, \dots, a_{j(n(2))}\}$ que $c_{m(2)}$ representa, $k(2)$ el índice de a_j que a'_3 representa y $k(3), k(4), \dots$ los demás números en $\mathbb{N}'' - (\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2)$ en orden creciente.

Sea $n(3)$ el menor natural n tal que $a'_3 + c'_{m(2)} + \sum_{r=3}^n a_{k(r)} \geq 3$. Sean $d_1 = c'_{m(2)}$, $d_2 = a'_3$, $d_3 = a_{k(3)}$ y $d_4, \dots, d_{n(3)}$ son los $\{a_{k(4)}, \dots, a_{k(n(3))}\}$ reordenados en forma decreciente. Nuevamente, el menor número de $\mathbb{N}'' - (\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2)$ es $k(1)$ o $k(3)$.

Sea $m(3)$ el menor natural tal que $\sum_{j=1}^m d_j \geq 3$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{m(3)-1} d_j < 3, \quad m(3) \leq n(3) \quad \text{y} \quad m(3) \geq 5.$$

$$\text{Sea } \tilde{c} = 3 - \sum_{j=1}^{m(3)-1} d_j, \quad d'_{m(3)-1} = d_{m(3)-3} + \tilde{c} \quad \text{y} \quad d'_{m(3)} = d_{m(3)} - \tilde{c}.$$

Notemos que $0 < \tilde{c} \leq d_{m(3)} \leq \frac{1}{2}$, de donde

$$0 \leq d'_{m(3)} < d_{m(3)} \leq d_{m(3)-1} < d'_{m(3)-1} \leq 1.$$

Continuando de esta manera, se construyen subconjuntos disjuntos $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots$ de $\mathbb{N}$, con unión $\mathbb{N}$. Además si $r(1), \dots, r(m(j) - 1)$ son los elementos de $\mathbb{N}_j$ con $r(3), \dots, r(m(j) - 1)$ en orden creciente, existen alteraciones $\tilde{a}_{r(1)}$ y $\tilde{a}_{r(m(j)-1)}$ de $a_{r(1)}$ y $a_{r(m(j)-1)}$ como describimos

$$\text{tales que } \tilde{a}_{r(1)} + a'_j + \sum_{k=3}^{m(j)-2} a_{r(k)} + \tilde{a}_{r(m(j)-1)} = 3.$$

Al mismo tiempo, con $s(1), \dots, s(m(j+1) - 1)$ los elementos de $\mathbb{N}_{j+1}$ y $\tilde{a}_{s(1)}, a_{s(2)}, \dots, a_{s(m(j+1)-2)}, \tilde{a}_{s(m(j+1)-1)}$, sumando 3, con $\tilde{a}_{s(1)}$ y $\tilde{a}_{s(m(j+1)-1)}$ los elementos de $a_{s(1)}$ y $a_{s(m(j+1)-1)}$ alterados como describimos antes.

Tenemos $\tilde{a}_{r(m(j)-1)} + \tilde{a}_{s(1)} = a_{r(m(j)-1)} + a_{s(1)}$ (ya que lo que se le suma a $a_{r(m(j)-1)}$ para convertirlo en $\tilde{a}_{r(m(j)-1)}$ es lo mismo que se le resta a $a_{s(1)}$ para convertirlo en $\tilde{a}_{s(1)}$) y

$$0 \leq \tilde{a}_{s(1)} < a_{s(1)} \leq a_{r(m(j)-1)} < \tilde{a}_{r(m(j)-1)} \leq 1.$$

Se incluye la posibilidad que $\mathbb{N}'$ sea finito (o nulo) en el argumento anterior. Si $\mathbb{N}'$ es $\{a'_1, \dots, a'_{j-1}\}$, eliminamos la referencia de " a_k " de la construcción de $\mathbb{N}_k$ si $k \geq j$.

Por el Teorema 2.19, existen proyecciones de dimensión 3, E_j y E_{j+1} , cuyas matrices relativas a las bases $\{e_{r(1)}, \dots, e_{r(m(j)-1)}\}$ y $\{e_{s(1)}, \dots, e_{s(m(j+1)-1)}\}$ tienen diagonales $\tilde{a}_{r(1)}, a_{r(2)}, \dots, a_{r(m(j)-2)}, \tilde{a}_{r(m(j)-1)}$ y $\tilde{a}_{s(1)}, a_{s(2)}, \dots, a_{s(m(j+1)-2)}, \tilde{a}_{s(m(j+1)-1)}$, respectivamente.

Extendemos cada proyección E_j a una proyección (denotada otra vez por " E_j ") definida sobre todo $\mathcal{H}$ que lo que hace es aniquilar todo otro elemento de la base. Entonces, puesto que todos los conjuntos $\mathbb{N}_j$ son disjuntos, $E_j E_k = 0$ si $j \neq k$.

$$\text{Sea } E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j.$$

La próxima parte de este argumento se basa en describir el proceso que transforma un operador, por medio de conjugación con operadores unitarios, de modo que dos elementos de la diagonal son reemplazados por sus combinaciones conexas, pero que conserva que la suma de los elementos originales es la misma que la suma de los reemplazados, y así transformaremos E en la proyección con la diagonal especificada.

Utilizaremos una sucesión de operadores unitarios $W_n(\theta_n)$ definidos de la siguiente manera:

$$W_k(\theta_k) = \begin{cases} \sin(\theta_k) & \text{en } (k, k), (k+1, k+1), \\ -\cos(\theta_k) & \text{en } (k, k+1), \\ \cos(\theta_k) & \text{en } (k+1, k), \\ 1 & \text{en } (j, j) \text{ con } j \neq k, j \neq k+1, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En este caso, con $h(1)$ el índice de a_j representado por $b_{m(1)-1}$ y recordando que $j(1)$ es el índice del a_j representado por $b_{m(1)}$ tenemos:

$$\begin{aligned} W_1(\theta_1)e_{h(1)} &= \sin(\theta_1)e_{h(1)} + \cos(\theta_1)e_{j(1)}, \\ W_1(\theta_1)e_{j(1)} &= -\cos(\theta_1)e_{h(1)} + \sin(\theta_1)e_{j(1)}, \\ W_1(\theta_1)e_j &= e_j \text{ para otro } e_j, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \langle W_1(\theta_1)EW_1(\theta_1)^*e_{h(1)}, e_{h(1)} \rangle &= b'_{m(1)-1} \sin^2(\theta_1) + b'_{m(1)} \cos^2(\theta_1) = b_{m(1)-1} = a_{h(1)}, \\ \langle W_1(\theta_1)EW_1(\theta_1)^*e_{j(1)}, e_{j(1)} \rangle &= b'_{m(1)-1} \cos^2(\theta_1) + b'_{m(1)} \sin^2(\theta_1) = b_{m(1)} = a_{j(1)}. \end{aligned}$$

Acá, θ_1 es elegido (se puede hacer pues $0 \leq b'_{m(1)} < b'_{m(1)-1} \leq 1$.) para que

$$b'_{m(1)-1} \sin^2(\theta_1) + b'_{m(1)} \cos^2(\theta_1) = b_{m(1)-1}$$

y como $b'_{m(1)-1} + b'_{m(1)} = b_{m(1)-1} + b_{m(1)}$ tenemos que

$$\begin{aligned} b'_{m(1)-1} \cos^2(\theta_1) + b'_{m(1)} \sin^2(\theta_1) &= b'_{m(1)-1} - \sin^2(\theta_1)b'_{m(1)-1} + b'_{m(1)} - \cos^2(\theta_1)b'_{m(1)} \\ &= b_{m(1)-1} + b_{m(1)} - b_{m(1)-1} = b_{m(1)}. \end{aligned}$$

De la misma manera definimos ahora $W_2(\theta_2)$. Si $g(1)$ es el índice del a_j representado por $c_{m(2)-1}$ y recordando que $k(1)$ es el índice del a_j representado por $c_{m(2)}$ tenemos:

$$\begin{aligned} W_2(\theta_2)e_{g(1)} &= \sin(\theta_2)e_{g(1)} + \cos(\theta_2)e_{k(1)}, \\ W_2(\theta_2)e_{k(1)} &= -\cos(\theta_2)e_{g(1)} + \sin(\theta_2)e_{k(1)}. \end{aligned}$$

Nuevamente, $W_2(\theta_2)EW_2(\theta_2)^*$ cambia $c'_{m(2)-1}$ y $c'_{m(2)}$ por $c_{m(2)-1}$ y $c_{m(2)}$, respectivamente, cuando θ_2 es adecuadamente elegido, y las otras entradas diagonales de E no cambian.

Notemos también que $W_1(\theta_1)W_2(\theta_2)e_j = W_2(\theta_2)W_1(\theta_1)e_j$ para cada j . Aquí utilizamos el hecho de que $\mathbb{N}_1$ y $\mathbb{N}_2$ tienen cada uno cuatro o más elementos (pues $m(i) \geq 5$, $i = 1, 2$), por los que los extremos no coinciden (o sea, $j(1), h(1), g(1)$, y $h(1)$ ninguno es igual a otro) de donde $W_1(\theta_1)$ y $W_2(\theta_2)$ conmutan.

Tenemos además, que $W_k(\theta_k)e_j = e_j$ al menos que $j \in \mathbb{N}_k \cup \mathbb{N}_{k+1}$, por lo que $W_k(\theta_k)E_n = E_n$ si $n \neq k$ o $n \neq k+1$, ya que E_n tiene rango en el espacio generado por $\{e_j : j \in \mathbb{N}_n\}$.

Supongamos $j \in \mathbb{N}_n$. Entonces

$$\begin{aligned} F_r(e_j) &= W_r(\theta_r) \dots W_n(\theta_n) \dots W_1(\theta_1)EW_1(\theta_1)^* \dots W_n(\theta_n)^* \dots W_r(\theta_r)^*e_j \\ &= W_r(\theta_r) \dots W_1(\theta_1)EW_n(\theta_n)^*W_{n-1}(\theta_{n-1})^*e_j \\ &= W_r(\theta_r) \dots W_1(\theta_1) \left(\sum_{h=n-1}^{n+1} E_h W_n(\theta_n)^* W_{n-1}(\theta_{n-1})^* e_j \right) \\ &= W_{n+1}(\theta_{n+1})W_n(\theta_n) \dots W_{n-2}(\theta_{n-2}) \left(\sum_{h=n-1}^{n+1} E_h W_n(\theta_n)^* W_{n-1}(\theta_{n-1})^* e_j \right) \end{aligned}$$

(en la segunda desigualdad conmutamos los $W_i^*(\theta_i)^*$ y aplicamos primero todos, excepto $W_n^*(\theta_n)^*$ y $W_{n-1}^*(\theta_{n-1})^*$, que son los que no afectan a e_j ; en la tercera igualdad cambiamos E por $\sum_{h=1}^{\infty} E_h$ y en la última igualdad volvemos a permutar y aplicamos primero los que no cambian nada).

En cualquier caso, $F_r(e_j) = F_s(e_j)$ cuando r y s exceden a $n+1$, por lo que $\{F_r(e_j)\}$ converge cuando $r \rightarrow \infty$ para cada j fijo. Como $\{F_r\}$ es una sucesión de proyecciones está uniformemente acotada por 1. La base $\{e_j\}$ genera un subespacio lineal denso en cada elemento en los cuales $\{F_r\}$ actúa produciendo una sucesión convergente de vectores en $\mathcal{H}$. Se sigue que $\{F_r x\}$ es convergente Cauchy, y por lo tanto convergente para cada $x \in \mathcal{H}$. Si este límite es Fx entonces F es lineal y $\|F\| < 1$. Por lo tanto, la sucesión de proyecciones $\{F_r\}$ es un operador fuertemente convergente a F y F es una proyección cuya matriz relativa a $\{e_j\}$ tiene diagonal $\{a_j\}$ en algún orden.

El argumento anterior establece nuestro resultado cuando $a = \infty$. Si $b = \infty$, el argumento muestra que existe una proyección G con $b_1, b_2, \dots$ como diagonal, donde $b_j = 1 - a_j$ y la diagonal de $I - G$ es $a_1, a_2, \dots (= 1 - b_1, 1 - b_2, \dots)$.

Ahora probaremos que *ii*) implica la existencia de ν y F . Por hipótesis, a y b son finitos y $a - b$ es un entero y tenemos la hipótesis adicional de que las sumas de los a_j y la de los b_j son ambas infinitas, por lo que $\mathbb{N}'$ y $\mathbb{N}''$ deben ser conjuntos infinitos.

Existen a lo sumo un número finito de a_j'' que exceden a $\frac{1}{n}$ para un número positivo dado (pues a es finito). Reordenando aquellos a_j'' en orden decreciente y dejando a n tomar los valores $1, 2, \dots$ sucesivamente se pueden renombrar los a_j'' por $a_1'' \geq a_2'' \geq \dots$. De manera similar se puede asumir que $b_1'' \geq b_2'' \geq \dots$ donde $b_j'' = 1 - a_j'$, de donde $a_1' \leq a_2' \leq \dots$.

Como $\sum_{j=1}^{\infty} a_j''$ y $\sum_{j=1}^{\infty} b_j''$ son finitos, tenemos que $a_j'' \rightarrow 0$ y $b_j'' \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, de donde tenemos que $a_j' \rightarrow 1$. Podemos asumir que $a \leq b$ (de lo contrario trabajamos con $b_1, b_2, \dots$). Discutiremos ahora un proceso para “distribuir los a_j'' entre los $a_1', a_2', \dots$ ”.

Sea n el menor entero k tal que $a_1'' \leq \sum_{j=1}^k b_j''$ entonces $\sum_{j=1}^{n-1} b_j'' < a_1''$. Reemplazamos

$$a_1', \dots, a_{n-1}' \text{ por } 1, \dots, 1$$

y

$$a_n' \text{ por } \tilde{a}_n' = a_n' + a_1'' - \sum_{j=1}^{n-1} b_j''.$$

Entonces $0 < a_n' < \tilde{a}_n'$, $a_1'' - \sum_{j=1}^{k-1} b_j'' \leq b_n''$ y así $\tilde{a}_n' = a_n' + a_1'' - \sum_{j=1}^{k-1} b_j'' \leq a_n' + b_n'' = 1$.

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j' + a_1'' &= \sum_{j=1}^n a_j' + \sum_{j=1}^{n-1} b_j'' + a_1'' - \sum_{j=1}^{n-1} b_j'' = \sum_{j=1}^{n-1} (a_j' + b_j'') + a_n' + a_1'' - \sum_{j=1}^{n-1} b_j'' \\ &= n - 1 + a_n' + a_1'' - \sum_{j=1}^{n-1} b_j'' = n - 1 + \tilde{a}_n'. \end{aligned}$$

(con lo que $(1, \dots, 1, \tilde{a}_n, 0)$ está ordenado en forma decreciente y su traza coincide con la de $(a_n', \dots, a_1', a_1'')$).

Se sigue del Teorema 2.13 que $(a'_n, \dots, a'_1, a'')$ está contenido en el politopo generado por las permutaciones de $(1, \dots, 1, \tilde{a}'_n, 0)$. Como en la demostración del Teorema 2.17, existe un operador unitario U_1 en $\mathcal{H}$ tal que $U_1 e_k = e_k$ para cada k fuera de $\mathbb{N}_1$, que es el conjunto de índices $\{j(1), \dots, j(n+1)\}$ de los a_j en $\{a'_n, \dots, a'_1, a''\}$. Este U_1 se restringe a η_1 , el subespacio de $\mathcal{H}$ generado por $\{e_{j(1)}, \dots, e_{j(n+1)}\}$ como un operador unitario U'_1 tal que $U'_1 A U'^*_1$ tiene matriz con diagonal $(a''_1, a'_1, \dots, a'_n)$ cuando A , sobre η_1 , tiene matriz con diagonal $(0, 1, \dots, 1, \tilde{a}'_n)$ relativa a las bases $\{e_{j(1)}, \dots, e_{j(n+1)}\}$.

Ahora distribuimos a''_2 entre $a'_{n+1}, a'_{n+2}, \dots$ por el procedimiento antes descrito, formando un subconjunto finito $\mathbb{N}_2 (= \{k(1), \dots, k(m+1)\})$ de $\mathbb{N}$, disjunto de $\mathbb{N}_1$, un operador unitario U_2 sobre $\mathcal{H}$, tal que $U_2 e_k = e_k$ para cada k fuera de $\mathbb{N}_2$, cuya restricción U'_2 a η_2 (el espacio generado por $e_{k(1)}, \dots, e_{k(m+1)}$) transforma cada operador A , en η_2 , cuya matriz tiene diagonal $(0, 1, \dots, 1, \tilde{a}'_{n+m})$ en uno cuya matriz tiene diagonal $(a''_2, a'_{n+1}, \dots, a'_{n+m})$ relativa a la base $e_{k(1)}, \dots, e_{k(m+1)}$.

Continuando de esta manera, construimos subconjuntos disjuntos $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots$ de $\mathbb{N}$, con unión $\mathbb{N}$, unitarios $U_1, U_2, \dots$ en $\mathcal{H}$ que conmutan y subespacios (de dimensión finita), $\eta_1, \eta_2, \dots$ con espacio generado denso en $\mathcal{H}$, como describimos antes.

Distribuyendo todos los a''_j entre los a'_j tenemos una sucesión infinita de ceros en el lugar de los a''_j y una sucesión infinita $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots$ de números en $(1/2, 1]$ tales que $\sum_{j=1}^{\infty} 1 - \tilde{a}_j = b - a$, entero por hipótesis (sabemos que hay un lugar para la distribución de todos los a''_j entre los a'_j por hipótesis, pues $a \leq b$).

Por la Observación 5.8, existe una proyección E_0 con diagonal $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots)$ relativa a la base $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ y claramente una proyección E con diagonal $(0, 0, \dots, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots)$ relativa a la base $\{e_j\}$. Organizamos la base $\{e_j\}$ conforme a los conjuntos $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots$ y la diagonal de la matriz para E tal que las entradas de las posiciones diagonales correspondientes a los números en $\mathbb{N}_j$ sean los números obtenidos por los pasos correspondientes del proceso de distribución.

Si nuevamente formamos $U_1 E U^*_1, U_2 U_1 E U^*_1 U^*_2, \dots$, sucesivamente, construimos una sucesión de proyecciones que converge, en la topología de operador fuerte, a una proyección F (por el mismo argumento usado para la primera parte de la prueba, donde asumimos que a es infinito).

La diagonal de F relativa a $\{e_j\}$ es $(a''_1, a''_2, \dots, a'_1, a'_2, \dots)$ por elección de los $U_1, U_2, \dots$.

Ahora solo nos queda la tarea de verificar la condición de que $a - b$ es entero. Sea ahora nuestra base ortonormal de $\mathcal{H}$ dada por $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}_0}$, donde $\mathbb{Z}_0$ es el conjunto de enteros no nulos, y F es una proyección de $\mathcal{H}$ con matriz (a_{jk}) relativa a $\{e_j\}$. Sean $\mathbb{Z}_-$ y $\mathbb{Z}_+$ los enteros negativos y positivos en $\mathbb{Z}_0$ respectivamente.

Nuestra suposición ahora es que $\sum_{j=-\infty}^{-1} a_{jj} (= a)$ y $\sum_{j=1}^{\infty} 1 - a_{jj} (= b)$ son finitos. Queremos probar que $a - b$ es entero.

Sea E la proyección cuyo rango es el espacio generado por $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}_-}$. En efecto, podemos asumir que $EFE \in \mathcal{L}^1$ y $(I - E)(I - F)(I - E) \in \mathcal{L}^1$.

Se sigue que $FE \in \mathcal{L}^2$, $EF \in \mathcal{L}^2$, $(I - F)(I - E) \in \mathcal{L}^2$ y $(I - E)(I - F) \in \mathcal{L}^2$. Por lo tanto, la suma de todos los $|a_{jk}|^2$ con j o k en $\mathbb{Z}_-$ converge como también lo hace la suma de todos los $|b_{jk}|^2$ con j o k en $\mathbb{Z}_+$, donde (b_{jk}) es la matriz de $(I - F)$. Si $T \in \mathcal{L}^2$, denotamos por $\|T\|_2$ la norma de Hilbert-Schmidt de T . Esto es, $\|T\|_2^2 = \text{tr}(T^*T) (= \text{tr}(TT^*))$, donde “ $\text{tr}(T^*T)$ ” es relativa a la base $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}_0}$.

Por lo tanto, $\|T\|_2^2$ es la suma de los cuadrados de los valores absolutos de todas las entradas de la matriz de T (o de T^*). Como $\|T\|_2^2 = \text{tr}(T^*T) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \langle T^*T e_j, e_j \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \|T e_j\|^2$. Si $B \in$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\|BT\|_2^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \|BT e_j\|^2 \leq \|B\|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \|T e_j\|^2 = \|B\|^2 \|T\|_2^2$$

y $\|BT\|_2 \leq \|B\| \|T\|_2$.

En esta notación tenemos

$$\|EF\|_2^2 = \|FE\|_2^2 = \text{tr}(EFE) = a$$

y

$$\|(I - F)(I - E)\|_2^2 = b$$

Dado un $\epsilon > 0$ ($\epsilon < (2 + 2a^{1/2} + 2b^{1/2})^{-1}$), elegimos $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\sum_{j \text{ ó } k < -n_0} |a_{jk}|^2 < (\epsilon')^2 \quad \text{y} \quad \sum_{j \text{ ó } k < -n_0} |b_{jk}|^2 < (\epsilon')^2,$$

donde $\epsilon' = \epsilon(28(1 + a^{1/2} + b^{1/2}))^{-1}$.

Sea $A = (a_{jk})_{j,k \geq 1}$ tal que

$$a_{jk} = \begin{cases} a_{jk} & \text{cuando las entradas } |j| \text{ y } |k| \text{ no exceden a } n_0, \\ 1 & \text{en la entrada } jj \text{ si } j > n_0, \\ 0 & \text{en las demás.} \end{cases}$$

Entonces, por elección de n_0 y A , $\|F - A\|_2 < 2\epsilon'$. De aquí $|\|F\|_2 - \|A\|_2| < 2\epsilon'$.

Sea E_0 la proyección con rango generado por $\{e_{-1}, \dots, e_{-n_0}\}$. Otra vez, por la elección de n_0 y A , $\|EF - E_0A\|_2 < 2\epsilon'$, de donde $|\|EF\|_2 - \|E_0A\|_2| < 2\epsilon'$. Sea E'_0 la proyección con rango generado por $\{e_1, \dots, e_{n_0}\}$ y I_0 la proyección $E_0 + E'_0$. Entonces $\|(I - E)A - (I - E)F\|_2 < 2\epsilon'$.

Al mismo tiempo, $(I - E)(I - A) = E'_0(I - A)$, de donde

$$\begin{aligned} |\|E'_0(I - A)\|_2 - \|(I - E)(I - F)\|_2| &\leq \|E'_0(I - A) - (I - E)(I - F)\|_2 \\ &= \|(I - E)(I - A) - (I - E)(I - F)\|_2 \\ &\leq \|I - E\| \|I - A - (I - F)\|_2 = \|F - A\|_2 < 2\epsilon'. \end{aligned}$$

Notar también que

$$\begin{aligned} \|A - A^2\|_2 &\leq \|A - F\|_2 + \|F^2 - FA\|_2 + \|FA - A^2\|_2 \\ &\leq \|A - F\|_2 + \|F\| \|F - A\|_2 + \|A\| \|F - A\|_2 < 6\epsilon'. \end{aligned}$$

Sea $A_0 = I_0 F I_0$. Entonces $A_0 - A_0^2 = A - A^2$, de donde $\|A_0 - A_0^2\|_2 < 6\epsilon'$. Claramente podemos tratar $A_0 = (a_{jk})_{|j|, |k| \leq n_0}$ como una matriz en M_{2n_0} . Como $A_0 = I_0 F I_0$, $\|A_0\| \leq 1$ y A_0 es positivo. Sean $\lambda_{-n_0}, \dots, \lambda_{n_0}$ los $2n_0$ autovalores de A_0 (con repeticiones), entonces $\lambda_{-n_0} - \lambda_{-n_0}^2, \dots, \lambda_{n_0} - \lambda_{n_0}^2$ son los autovalores de $A_0 - A_0^2$.

Sea $\mathcal{E}_j = \lambda_j - \lambda_j^2 (= \lambda_j(1 - \lambda_j))$.

- Si $\lambda_j \geq 1/2$ tenemos $(1 - \lambda_j)^2 \leq 4\mathcal{E}_j^2$.
- Si $\lambda_j \leq 1/2$, tenemos $\lambda_j^2 \leq 4\mathcal{E}_j^2$.

Supongamos que existen m_0 de los autovalores $\lambda_j \in [1/2, 1]$. Si $\{e_k\}_{k \in A}$ es la base de diagonaliza a A_0 , sea $G_0 = (g_0)_{kk}$ la proyección en la base $\{e_k\}_{k \in A}$ tal que es diagonal con:

$$(g_0)_{kk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_k \in [1/2, 1], \\ 0 & \text{en los lugares de los otros } \lambda_k. \end{cases}$$

Entonces

$$\|A_0 - G_0\|_2^2 \leq 4 \sum_{j=-n_0}^{n_0} \mathcal{E}_j^2 = 4\|A - A_0^2\|_2^2,$$

y $\|A_0 - G_0\|_2 \leq 2\|A - A_0^2\|_2 < 12\epsilon'$. Por lo tanto, $\|E_0 A_0 - E_0 G_0\|_2 < 12\epsilon'$.

Como $E_0 A = E_0 A_0$,

$$\|EF - E_0 G_0\|_2 \leq \|EF - E_0 A\|_2 + \|E_0 A_0 - E_0 G_0\|_2 < 14\epsilon'.$$

Al mismo tiempo, $(I - E)(I - A) = E'_0(I_0 - A_0)$, de donde

$$\begin{aligned} \|(I - E)(I - F) - E'_0(I_0 - G_0)\|_2 &\leq \|(I - E)(I - F) - (I - E)(I - A)\|_2 \\ &\quad + \|E'_0(I_0 - A_0) - E'_0(I_0 - G_0)\|_2 < 14\epsilon'. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\left| \|EF\|_2 - \|E_0 G_0\|_2 \right| < 14\epsilon' < 1$$

y

$$\left| \|(I - E)(I - F)\|_2 - \|E'_0(I_0 - G_0)\|_2 \right| < 14\epsilon' < 1.$$

Por lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \left| a - \|E_0 G_0\|_2^2 \right| &= \left| \|EF\|_2^2 - \|E_0 G_0\|_2^2 \right| = \left| (\|EF\|_2 - \|E_0 G_0\|_2)(\|EF\|_2 + \|E_0 G_0\|_2) \right| \\ &< 14\epsilon' \left(1 + 2\|EF\|_2 \right) = 14(1 + a^{1/2})\epsilon'. \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} \left| b - \|E'_0(I_0 - G_0)\|_2^2 \right| &= \left| \|(I - E)(I - F)\|_2^2 - \|E'_0(I_0 - G_0)\|_2^2 \right| \\ &= \left| (\|(I - E)(I - F)\|_2 - \|E'_0(I_0 - G_0)\|_2)(\|(I - E)(I - F)\|_2 + \|E'_0(I_0 - G_0)\|_2) \right| \\ &< 14\epsilon' \left(1 + 2\|(I - E)(I - F)\|_2 \right) = 14(1 + b^{1/2})\epsilon'. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como I_0 , E_0 y G_0 tienen rango $2n_0$, n_0 y m_0 , respectivamente, por la Proposición 6.1

$$\begin{aligned} \left| a - b - (m_0 - n_0) \right| &= \left| a - b - (m_0 - 2n_0 + n_0) \right| \\ &= \left| a - b - [\text{tr}(E_0 G_0 E_0) - \text{tr}((I_0 - E_0)(I_0 - G_0)(I_0 - E_0))] \right| \\ &= \left| a - b - \left(\|E_0 G_0\|_2^2 - \|E'_0(I_0 - G_0)\|_2^2 \right) \right| \\ &\leq \left| a - \|E_0 G_0\|_2^2 \right| + \left| b - \|E'_0(I_0 - G_0)\|_2^2 \right| < 28(1 + a^{1/2} + b^{1/2})\epsilon' = \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora, m_0 y n_0 varían con la elección de ϵ , pero siempre son enteros. Como $a - b$ está arbitrariamente cerca de un número entero, entonces $a - b$ pertenece a los enteros.

Podemos establecer que $a - b$ es entero para un subconjunto arbitrario

$$S = \{(d_n) : d_n \text{ es diagonal de } F \text{ con suma convergente } a\}$$

y con subconjunto complemento

$$S' = \{(d'_n) : d'_n \text{ es diagonal de } F \text{ con la suma de } 1 - d_n \text{ convergente } b\}.$$

Para concluir nuestra prueba, notemos que la existencia de cualquier conjunto S de esta manera implica que el conjunto S_0 de los a_{jj} en $[0, 1/2]$ puede ser ese tal conjunto. Como S tiene una suma convergente, este contiene a los más un número finito de a_{jj} excediendo a $1/2$.

De manera similar, S' contiene a lo sumo un número finito de a_{jj} menores o iguales a $1/2$.

El desplazamiento de un conjunto finito de S a S' o uno de S' a S produce los conjuntos S_0 y S'_0 con suma convergente a a_0 y b_0 respectivamente. Más aún, $a_0 - b_0$ y $a - b$ difieren en un entero (si cambiamos, por ejemplo, n elementos a_{jj} de S a S' con $\sum_{i=1}^n a_{j_i j_i} = t$, entonces el conjunto S'

pasa a tener n elementos más con $\sum_{i=1}^n b_{j_i j_i} = n - t$, de donde $a_0 - b_0 = a - t - b + (n - t) = a - b + n$, con n entero por ser cantidad de elementos). Por lo tanto, $a_0 - b_0$ es un entero si y solo si $a - b$ lo es. ■

A continuación, daremos un ejemplo de una sucesión que no es diagonal principal de ninguna proyección cuyo rango y núcleo sean de dimensión infinita.

Ejemplo 6.3. Definimos la sucesión $c = (c_k)_{k \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$c_k = \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}, \\ c_k = \left(\frac{1}{5}\right)^k & \text{si } k \neq 1 \text{ es impar,} \\ c_k = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^k & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces no existe ninguna proyección ortogonal F tal que $\|Fe_k\|^2 = c_k$ para cada k .

Demostración: Notemos que $c_k \in (0, 1)$ para toda $k \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2k} = \infty$$

pues como $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^2}\right)^k = \frac{1/25}{1 - (1/25)} = \frac{1}{24}$ tenemos $\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2k} = \infty$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - c_k) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k} = \infty$$

pues como $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^2}\right)^k = \frac{1}{5} \cdot \frac{1/25}{1 - 1/25} = \frac{1}{120}$, tenemos $\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} = \infty$.

Además,

- $c_k \leq \frac{1}{2}$ para los k impares.

- $c_k > \frac{1}{2}$ para los k pares.

Si definimos a y b como en el Teorema 6.2

$$a = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{120}$$

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k} = \frac{1}{24},$$

de donde $a - b = \frac{61}{120} - \frac{1}{24} = \frac{7}{15} \notin \mathbb{Z}$. Entonces por el Teorema 6.2, no existe ninguna proyección ortogonal F tal que c sea su diagonal principal. ■

7. El índice de obstrucción de Arveson

En esta sección desarrollamos el trabajo de Arveson [3]. En el mismo, se encuentra una obstrucción para las diagonales principales de los operadores normales con espectro de multiplicidad uniforme infinita. Esta obstrucción extiende a la encontrada por Kadison en la sección anterior (Teorema 6.2).

Definiciones 7.1. Sea X un subconjunto finito del plano complejo $\mathbb{C}$, y consideremos el conjunto $\mathcal{N}(X)$ de todos los operadores normales, actuando en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, que tienen espectro X con multiplicidad uniformemente infinita, es decir,

$$\mathcal{N}(X) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) / A^*A = AA^*, \sigma(A) = \sigma_e(A) = X\}.$$

El conjunto $\mathcal{N}(X)$ es invariante bajo la acción del grupo de *-automorfismos por conjugación unitaria de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y este es cerrado en la norma operador.

Fijada una base ortonormal $\{e_n\}_{n \geq 1}$ de $\mathcal{H}$, podemos considerar el conjunto (no cerrado) $D(X)$ de todas las diagonales de los operadores en $\mathcal{N}(X)$

$$D(X) = \left\{ (\langle Ae_1, e_1 \rangle, \langle Ae_2, e_2 \rangle, \dots) \in \ell^\infty / A \in \mathcal{N}(X) \right\}.$$

Estudiaremos ahora el problema de determinar los elementos de $D(X)$.

Notemos que para cada sucesión $d = (d_n)_{n \geq 1} \in D(X)$, cada término d_n debe pertenecer a la cápsula convexa de X . En efecto, como existe un operador normal $A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$ (con $\text{tr}(P_i) = \infty$) con espectro X , tal que $d_n = \langle Ae_n, e_n \rangle$, $n \geq 1$, entonces

$$d_n = \langle Ae_n, e_n \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i e_n, e_n \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle P_i e_n, e_n \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|P_i e_n\|^2$$

y $\sum_{i=1}^m \|P_i e_n\|^2 = 1$, de donde, para cada $n \geq 1$, $d_n \in \text{conv}(X)$.

Esta condición solo es necesaria, es decir, que $d_n \in \text{conv}(X)$, $n \geq 1$ no es suficiente para caracterizar $D(X)$.

Notemos además que un operador normal con espectro $\{0, 1\}$ es una proyección. En la sección anterior ya dimos una caracterización de $D(\{0, 1\})$ en el Teorema 6.2. Podemos reformular el mismo de la siguiente manera:

Teorema 7.2. Sea $d = (d_n)_{n \geq 1} \in [0, 1]^\mathbb{N}$ con $\sum_{n=1}^\infty d_n = \sum_{n=1}^\infty 1 - d_n = \infty$. Sean $a, b \in [0, \infty]$ los números

$$a = \sum_{d_n \leq 1/2} d_n \quad y \quad b = \sum_{d_n > 1/2} 1 - d_n.$$

Entonces $d \in D(\{0, 1\})$ si y solo si tenemos alguna de las siguientes afirmaciones:

- i) Si $a + b = \infty$.
- ii) Si $a + b < \infty$ y $a - b \in \mathbb{Z}$.

Queremos un resultado análogo para ciertos subconjuntos finitos $X \subseteq \mathbb{C}$ en lugar de $\{0, 1\}$. Estos subconjuntos X que estudiaremos serán aquellos en los cuales ninguno de sus puntos puede ser escrito como una combinación convexa no trivial de los otros, es decir, X es el conjunto de vértices de un polígono convexo.

7.1. Sucesiones en $\text{Lim}^1(X)$ y el grupo Γ_X .

Sea $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ un conjunto finito de números complejos. Para cada número complejo z escribimos

$$d(z, X) = \min_{\lambda \in X} |z - \lambda|$$

para la distancia de z a X .

Consideremos el espacio $\text{Lim}^1(X)$ de todas las sucesiones $a = (a_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$ con la propiedad

$$(23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, X) < \infty.$$

Por lo tanto, una sucesión $a = (a_n)_{n \geq 1}$ pertenece a $\text{Lim}^1(X)$ si y solo si todos sus puntos límites pertenecen a X y convergen rápidamente a sus puntos límites en el siguiente sentido: existe una sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ con $x_n \in X$, para cada $n \geq 1$, y tal que

$$(24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - x_n| < \infty.$$

En el contexto del Teorema 7.2, (24) reduce la hipótesis de *ii*) cuando $X = \{0, 1\}$. Esto se verá bien en la sección 7.6

Veremos a continuación que cada elemento $a \in \text{Lim}^1(X)$ tiene una suma renormalizada que toma valores en un grupo abeliano Γ_X naturalmente asociado a X .

Para un $a \in \text{Lim}^1(X)$ fijo existen varias sucesiones $x = (x_n)_{n \geq 1}$ con valores en X que satisfacen (24). Sin embargo, podemos tratar de definir una suma normalizada de un elemento $a \in \text{Lim}^1(X)$ por elección de una sucesión $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ que satisfaga (24) y que forme el número complejo $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - x_n$.

Mientras que el valor de s depende de la elección del $x = (x_n)_{n \geq 1} \subset X$, la siguiente observación muestra que la ambigüedad está asociada con un subgrupo numerable del grupo aditivo de $\mathbb{C}$.

Proposición 7.3. *Sea $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{C}$ y sea $a = (a_n)_{n \geq 1} \in \text{Lim}^1(X)$ fijo. Para cualesquiera dos sucesiones $x = (x_n)_{n \geq 1}$, $y = (y_n)_{n \geq 1}$ en X que satisfacen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - x_n| < \infty \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - y_n| < \infty$$

la sucesión de las diferencias $x - y = (x_n - y_n)_{n \geq 1}$ tiene finitos términos no nulos, y existen enteros $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{Z}$ tales que $v_1 + \dots + v_N = 0$ y

$$(25) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n = v_1 \lambda_1 + \dots + v_N \lambda_N.$$

Demostración: Como $a - x$ y $a - y$ ambos pertenecen a ℓ^1 , su diferencia $x - y$ también pertenece a ℓ^1 . Como $x_n - y_n$ toma valores en el conjunto finito de diferencias $X - X$ y pertenece a ℓ^1 , debe hacerse cero para todos, menos finitos índices n , y para cada uno de los restantes n índices, $x_n - y_n$ es de la forma $\lambda_{i_n} - \lambda_{j_n}$ donde $i_n, j_n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n$ es una suma finita de términos de la forma $\lambda_i - \lambda_j$ con $1 \leq i, j \leq N$ y, reordenando, tal número tiene

la forma (25) con coeficientes enteros $v_k \in \mathbb{Z}$ que suman cero (la cantidad de términos positivos y negativos aparecen de a pares, por lo que se compensan). ■

Definición 7.4. Para cada conjunto finito de $N \geq 2$ números complejos $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, sea K_X el subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ que consiste de todos los z de la forma $z = v_1\lambda_1 + \dots + v_N\lambda_N$ donde $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{Z}$ satisfacen $v_1 + \dots + v_N = 0$.

Definimos además como Γ_X el cociente de los grupos abelianos $\Gamma_X = \mathbb{C}/K_X$.

K_X es el subgrupo de $\mathbb{C}$ generado por el conjunto de diferencias $\lambda_i - \lambda_j$, para $1 \leq i, j \leq N$, o equivalentemente, por $\{\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1, \dots, \lambda_N - \lambda_1\}$. De aquí que el rango de K_X sea a lo sumo $N - 1$.

Por la Proposición 7.3, podemos definir la función $s : \text{Lim}^1(X) \rightarrow \Gamma_X$ como sigue: para cada $a = (a_n)_{n \geq 1} \in \text{Lim}^1(X)$, elegimos una sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ con valores en X y que satisfaga $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - x_n| < \infty$, y sea $s(a)$ el coset $s(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - x_n) + K_X \in \Gamma_X$.

Definición 7.5. Para cada sucesión $a \in \text{Lim}^1(X)$, el elemento $s(a) \in \Gamma_X$ es llamado la suma renormalizada de a .

Cuando sea necesario hacer referencia sobre el conjunto X de vértices, escribiremos $s_X(a)$ en lugar de $s(a)$.

Observación 7.6. La función $s : \text{Lim}^1(X) \rightarrow \Gamma_X$ es suyectiva. En efecto, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, el coset $z + K_X \in \Gamma_X$ es realizado como el valor $s(a)$ de una suma renormalizada como sigue: elegimos cualquier sucesión $u = (u_n)_{n \geq 1}$ en ℓ^1 tal que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = z$, y sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión arbitraria con $x_n \in X$ para cada $n \geq 1$. Entonces la suma $a = u + x$ pertenece a $\text{Lim}^1(X)$ y satisface $s(a) = z + K_X$.

Requerimos las siguientes descripciones elementales de sucesiones en $\text{Lim}^1(X)$.

Proposición 7.7. Sea $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ un conjunto finito de números complejos distintos y sea $a = (a_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $a \in \text{Lim}^1(X)$.

ii) Se tiene la condición de sumabilidad $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n)| < \infty$ donde f es el polinomio

$$f(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_N).$$

Demostración: Sea δ la mínima distancia entre los distintos puntos de X , es decir,

$$\delta = \min_{1 \leq i < j \leq N} |\lambda_i - \lambda_j|.$$

Notemos primero que cuando $z \in \mathbb{C}$ satisface $d(z, X) \leq \delta/2$, tenemos

$$(26) \quad |f(z)| \geq d(z, X)(\delta/2)^{N-1}.$$

En efecto, si elegimos k tal que $d(z, X) = |z - \lambda_k|$, entonces para $j \neq k$ tenemos

$$|z - \lambda_j| \geq |\lambda_k - \lambda_j| - |z - \lambda_k| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2,$$

por lo tanto $|(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_N)| \geq |z - \lambda_k|(\delta/2)^{N-1}$, y se obtiene (26).

Si $a = (a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n)|$ converge, entonces puesto que $|f(z)| \geq d(z, X)^N$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se sigue que $d(a_n, X)^N \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, X) \leq \delta/2$ para $n \geq n_0$. (26) implica que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |f(a_n)| \geq (\delta/2)^{N-1} \sum_{n=n_0}^{\infty} d(a_n, X),$$

de donde $\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, X)$ converge, por lo que $a \in \text{Lim}^1(X)$.

Recíprocamente, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, X)$ converge. Sea

$$R = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_N|) > 0.$$

Puesto que $d(a_n, X) \rightarrow 0$, podemos hallar n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$, $|a_n| \leq 2R$. Eligiendo $k_1, k_2, \dots$ tales que $d(a_n, X) = |a_n - \lambda_{k_n}|$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(a_n)| &= |a_n - \lambda_1| \dots |a_n - \lambda_N| \leq (|a_n| + |\lambda_1|) \dots |a_n - \lambda_{k_n}| \dots (|a_n| + |\lambda_N|) \\ &\leq |a_n - \lambda_{k_n}| (3R)^{N-1} = d(a_n, X) (3R)^{N-1} \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_1$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n)|$ converge. ■

7.2. X -descomposición

Vemos a ℓ^∞ como una C^* -álgebra abeliana con unidad 1, y sus elementos como funciones acotadas $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ con norma $\|a\| = \sup_{n \geq 1} |a(n)|$.

Sea P un polígono convexo en el plano complejo y sea $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ el conjunto de sus vértices, con $N \geq 2$. Describiremos una descomposición elemental (no única) para sucesiones que tienen valores en P , y mostraremos que bajo ciertas circunstancias, todas tales descomposiciones deben compartir una propiedad fundamental.

Proposición 7.8. *Sea $P \subseteq \mathbb{C}$ un polígono convexo con vértices $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. Cada sucesión $a \in \ell^\infty$ que satisface $a(n) \in P$, $n \geq 1$ puede descomponerse en una suma de la forma*

$$(27) \quad a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N$$

donde $e_1, \dots, e_N$ son elementos positivos de ℓ^∞ satisfaciendo $e_1 + \dots + e_N = 1$.

Recíprocamente, cualquier sucesión a de la forma (27) con elementos e_k positivos que suman 1, debe satisfacer que $a(n) \in P$ para cada $n \geq 1$.

Demostración:

Sea a fijo, elegimos $n \geq 1$. Puesto que $a(n) \in P$ y P es la cápsula convexa de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, podemos hallar un punto $(e_1(n), \dots, e_N(n)) \in \mathbb{R}^N$ tal que, para cada $1 \leq i \leq N$,

$$e_i(n) \geq 0, \quad e_1(n) + \dots + e_N(n) = 1 \quad \text{y} \quad a(n) = \sum_{k=1}^N e_k(n) \lambda_k.$$

La sucesión $e_k = (e_k(1), e_k(2), \dots) \in \ell^\infty$ satisface $e_k \geq 0$, $e_1 + \dots + e_N = 1$, y la representación (27) es válida.

La recíproca es trivial. ■

Definición 7.9. Sea $P \subseteq \mathbb{C}$ un polígono convexo cuyo conjunto de vértices es $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ y sea $a \in \ell^\infty$ que satisface $a(n) \in P$, $n \geq 1$. Una representación de la forma (27) es llamada X -descomposición de a .

A pesar del hecho de que la X -descomposición no es única, excepto circunstancias especiales, hay una propiedad común para toda X -descomposición de a en el caso donde $\sum_{n=1}^{\infty} d(a(n), X) < \infty$ es decir, $a \in \text{Lim}^1(X)$.

Para el Teorema 7.11 se requerirá el caso $n = 2$ del siguiente Lema.

Lema 7.10. Sea P un poliedro convexo en $\mathbb{R}^n$ con puntos extremos $x_1, \dots, x_r$. Consideremos el simplex

$$\Delta = \left\{ (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r : t_i \geq 0, t_1 + \dots + t_r = 1 \right\},$$

y la función afín de Δ sobre P definida por

$$t \in \Delta \mapsto x(t) = t_1 x_1 + \dots + t_r x_r.$$

Para cualquier elección de normas en $\mathbb{R}^r$ y $\mathbb{R}^n$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$(28) \quad d_a(t, \{\delta_1, \dots, \delta_r\}) \leq C \cdot d_b(x(t), \{x_1, \dots, x_r\}) \quad t \in \Delta,$$

donde $d_i(v, S) = \inf \{\|v - s\|_i : s \in S\}$, para $i = a, b$, denota la distancia de un vector v al conjunto S , y donde $\delta_1, \dots, \delta_r$ son los puntos extremos de Δ , donde $(\delta_k)_j = \delta_{kj}$.

Demostración: Es suficiente con mostrar que para cada $1 \leq k \leq r$, existe una constante C_k tal que

$$(29) \quad \|t - \delta_k\|_a \leq C_k \|x(t) - x_k\|_b, \quad t \in \Delta.$$

En efecto, (29) implica

$$\min_{1 \leq k \leq r} \|t - \delta_k\|_a \leq C \min_{1 \leq k \leq r} \|x(t) - x_k\|_b, \quad t \in \Delta,$$

donde $C = \max(C_1, \dots, C_r)$, y así tenemos (28).

Por simetría, es suficiente con probar (29) para $k = 1$. Asumimos que $x_1 = 0$ es uno de los puntos extremos de P (de no ser así, podemos, sin pérdida de generalidad, realizar una traslación afín para tener $x_1 = 0$). Para cada punto extremo e de un poliedro convexo P , existe un hiperplano soporte que toca P sólo en $\{e\}$. Así pues, existe un funcional lineal f en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in P$ no nulo. Para cada $t \in \Delta$ tenemos

$$(30) \quad f(x(t)) = \sum_{k=2}^r t_k f(x_k) \geq \min_{2 \leq k \leq r} f(x_k) \sum_{k=2}^r t_k.$$

Recordemos que en $\mathbb{C}^n$ todas las normas son equivalentes, por lo que podemos elegir la norma. Tomaremos en este caso, $\|\cdot\|_a = \|\cdot\|_1$. Después, notando que $f(x(t)) \leq \|f\|_b \cdot \|x(t)\|_b$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|t - \delta_1\|_1 &= \sum_{k=1}^r |t_k - \delta_1(k)| = |t_1 - 1| + \sum_{k=2}^r t_k = 1 - t_1 + \sum_{k=2}^r t_k \\ &= 2 \sum_{k=2}^r t_k \leq \frac{2\|f\|_b}{\min(f(x_2), \dots, f(x_r))} \cdot \|x(t)\|_b, \end{aligned}$$

(para la segunda igualdad usamos que $\delta_1 = (1, 0, \dots, 0)$, que $0 \leq t_k \leq 1$ y $\sum_{i=1}^k t_k = 1$, de donde

$1 - t_1 = \sum_{k=2}^r t_k$ y para la última desigualdad usamos (30), notando que $\min(f(x_2), \dots, f(x_r)) >$

0 pues $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0 \in P$) y (29) vale con $C_1 = \frac{2\|f\|_b}{\min(f(x_2), \dots, f(x_r))}$. ■

Teorema 7.11. Sea $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ el conjunto de vértices de un polígono convexo $P \subseteq \mathbb{C}$ y sea $a \in \ell^\infty$ satisfaciendo $a(n) \in P$ para $n \geq 1$. Si $a \in \text{Lim}^1(X)$, entonces para cada X -descomposición de la forma (27),

$$a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N,$$

cada una de las sucesiones $e_1, \dots, e_N$ pertenecen a $\text{Lim}^1(\{0, 1\})$.

Demostración: Consideremos la norma euclídea en $\mathbb{C}$, la norma

$$\|(x_1, \dots, x_N)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_N|$$

en $\mathbb{R}^N$, y fijamos $n \in \mathbb{N}$. Puesto que el punto $(e_1(n), \dots, e_N(n)) \in \mathbb{R}^N$ pertenece al simplex Δ del Lema 7.10, existe una constante $C > 0$ tal que

$$d((e_1(n), \dots, e_N(n)), \{\delta_1, \dots, \delta_N\}) \leq C \cdot d(a(n), \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}) = C \cdot d(a(n), X), \quad n \geq 1.$$

Ahora, para cada punto $t = (t_1, \dots, t_N)$ en el simplex Δ y para cada $k = 1, \dots, N$ fijo tenemos

$$d(t_k, \{0, 1\}) = \min(t_k, 1 - t_k) \leq \min_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{j \neq k} t_j + (1 - t_k) \right) = d(t, \{\delta_1, \dots, \delta_N\}).$$

En efecto, para la desigualdad anterior usamos que $0 \leq t_j \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq N$, $\sum_{i=1}^N t_i = 1$

y que si $t_{k_0} = \max_{1 \leq k \leq N} t_k$, tenemos

$$(31) \quad \min_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{j \neq k} t_j + (1 - t_k) \right) = \left(\sum_{j \neq k_0} t_j + (1 - t_{k_0}) \right)$$

y entonces:

- si $t_{k_0} \geq 1/2$, entonces, para toda $1 \leq j \leq N$ con $j \neq k_0$, tenemos que $t_j < 1/2$, entonces $t_j = \min\{t_j, 1 - t_j\}$ y $t_j < \min_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{j \neq k} t_j + (1 - t_k) \right)$, (por (31)) y para $j = k_0$,

$$\min\{t_{k_0}, 1 - t_{k_0}\} = 1 - t_{k_0} < \min_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{j \neq k} t_j + (1 - t_k) \right) \quad (\text{por (31)}).$$

- si $t_{k_0} < 1/2$, entonces $t_j \leq t_{k_0} < 1/2$ por lo que $\min\{t_j, 1 - t_j\} = t_j < 1/2$, y además, $\left(\sum_{j \neq k_0} t_j + (1 - t_{k_0}) \right) > 1$, pues cambiamos t_{k_0} por $1 - t_{k_0}$ que es más grande, y la suma daba 1. Por lo tanto $t_j \leq \min_{1 \leq k \leq N} \left(\sum_{j \neq k} t_j + (1 - t_k) \right)$.

Entonces se sigue que

$$d(e_k(n), \{0, 1\}) \leq d((e_1(n), \dots, e_N(n)), \{\delta_1, \dots, \delta_N\}) \leq C \cdot d(a(n), X).$$

Usando $a \in \text{Lim}^1(X)$, podemos sumar la desigualdad anterior sobre n para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(e_k(n), \{0, 1\}) \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} d(a(n), X) < \infty.$$

Por lo tanto, $e_k \in \text{Lim}^1(\{0, 1\})$. ■

7.3. Dos proyecciones.

Se sabe que para cualquier par de proyecciones $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para las que $P - Q$ es un operador de tipo traza, $\text{tr}(P - Q)$ debe ser un número entero. Queremos una extensión apropiada de este resultado para el caso donde $P - Q$ es un operador de Hilbert-Schmidt.

Notación: Escribiremos $P^\perp$ para $1 - P$ cuando $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sea proyección.

Teorema 7.12. Sean M, N subespacios de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con respectivas proyecciones P, Q y tales que $P - Q \in \mathcal{L}^2$. Entonces, $Q(P - Q)Q \in \mathcal{L}^1$ y $Q^\perp(P - Q)Q^\perp \in \mathcal{L}^1$.

Los subespacios $M \cap N^\perp$ y $N \cap M^\perp$ son de dimensión finita y

$$(32) \quad \text{tr}(Q(P - Q)Q + Q^\perp(P - Q)Q^\perp) = \dim(M \cap N^\perp) - \dim(N \cap M^\perp).$$

En particular, $(QPQ + Q^\perp PQ^\perp - Q) \in \mathcal{L}^1$ es tal que

$$(33) \quad \text{tr}(QPQ + Q^\perp PQ^\perp - Q) \in \mathbb{Z}$$

Veremos la demostración más adelante.

Ahora, usamos el resultado recién obtenido para deducir el resultado que adelantamos al principio de esta subsección, es decir, el caso en que $P - Q$ es un operador de tipo traza:

Corolario 7.13. Si P y Q son proyecciones tales que $P - Q \in \mathcal{L}^1$, entonces $\text{tr}(P - Q) \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

$$P - Q = Q(P - Q)Q + Q(P - Q)Q^\perp + Q^\perp(P - Q)Q + Q^\perp(P - Q)Q^\perp$$

con lo que

$$\begin{aligned} \text{tr}(P - Q) &= \text{tr}(Q(P - Q)Q + Q^\perp(P - Q)Q^\perp) + \text{tr}(Q(P - Q)Q^\perp + Q^\perp(P - Q)Q) \\ &= \text{tr}(Q(P - Q)Q + Q^\perp(P - Q)Q^\perp) + \text{tr}(Q^\perp Q(P - Q) + QQ^\perp(P - Q)) \\ &= \text{tr}(Q(P - Q)Q + Q^\perp(P - Q)Q^\perp) = \dim(M \cap N^\perp) - \dim(N \cap M^\perp) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
■

Para la prueba del Teorema 7.12 requeriremos el siguiente resultado.

Lema 7.14. Sean $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ espacios de Hilbert y sea $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ un operador tal que $(1_{\mathcal{H}} - A^*A) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ y $(1_{\mathcal{K}} - AA^*) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{K})$. Entonces A es un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tal que

$$(34) \quad \dim(\ker A) - \dim(\ker A^*) = \text{tr}(1_{\mathcal{H}} - A^*A) - \text{tr}(1_{\mathcal{K}} - AA^*).$$

Demostración: Consideremos la descomposición polar $A = U|A|$, donde $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ es la isometría parcial con espacio inicial $(\ker A)^\perp$ y espacio final $\overline{R(A)}$.

Entonces $A^*A = |A|U^*U|A| = |A|^2 = C \oplus 0_{(\ker A)}$, con $C \in \mathcal{B}((\ker A)^\perp)$, y $Cu = A^*Au \in (\ker A)^\perp$, para $u \in (\ker A)^\perp$.

Análogamente, sea

$$AA^* = U|A||A|U^* = U|A|^2U^* = UA^*AU^* = U(C \oplus 0_{(\ker A)})U^* = C' \oplus 0_{(\ker A^*)},$$

con $C' \in \mathcal{B}(\overline{R(A)})$, y $C'u = AA^*u$ para $u \in \overline{R(A)}$, pues $U0_{(\ker A)}U^* = 0_{(R(A))^\perp} = 0_{(\ker A^*)}$.

Tenemos entonces que

$$\underline{U} = U|_{(\ker A)^\perp} : (\ker A)^\perp \rightarrow \overline{R(A)}$$

es un isomorfismo isométrico (suyectivo) tal que $\underline{U}C(\underline{U})^* = C'$. En particular,

$$\underline{U}(1_{(\ker A)^\perp} - C)(\underline{U})^* = 1_{\overline{R(A)}} - C',$$

de donde,

$$\text{tr}(1_{(\ker A^*)^\perp} - C') = \text{tr}(1_{\overline{R(A)}} - C') = \text{tr}(1_{(\ker A)^\perp} - C).$$

Se sigue que

$$1_{\mathcal{H}} - A^*A = (1_{(\ker A)^\perp} - C) \oplus 1_{(\ker A)} \quad \text{y} \quad 1_{\mathcal{K}} - AA^* = (1_{(\ker A^*)^\perp} - C') \oplus 1_{(\ker A^*)}.$$

Puesto que $(1_{(\ker A)^\perp} - C) \in \mathcal{L}^1$, tenemos que $\text{tr}(1_{\mathcal{H}} - A^*A) = \text{tr}(1_{(\ker A)^\perp} - C) + \dim(\ker A)$, y de manera similar $\text{tr}(1_{\mathcal{K}} - AA^*) = \text{tr}(1_{(\ker A^*)^\perp} - C') + \dim(\ker A^*)$. Por lo tanto,

$$\text{tr}(1_{\mathcal{H}} - A^*A) - \text{tr}(1_{\mathcal{K}} - AA^*) = \dim(\ker A) - \dim(\ker A^*),$$

como habíamos afirmado. ■

Demostración: (del Teorema 7.12). Afirmamos primero que $Q(P - Q)Q \in \mathcal{L}^1$. En efecto, tenemos que $Q(P - Q)Q = -(Q - QPQ)$, y $Q - QPQ = QP^\perp Q$ es un operador positivo que satisface que

$$\text{tr}(Q - QPQ) = \text{tr}(QP^\perp Q) = \text{tr}(|P^\perp Q|^2) = \text{tr}(|(P - Q)Q|^2) < \infty.$$

De manera similar, $Q^\perp(P - Q)Q^\perp = Q^\perp PQ^\perp$, y

$$\text{tr}(Q^\perp PQ^\perp) = \text{tr}(|PQ^\perp|^2) = \text{tr}(|(P - Q)Q^\perp|^2) < \infty,$$

de donde $Q^\perp(P - Q)Q^\perp \in \mathcal{L}^1$.

Sea $\mathcal{H}_0$ el subespacio de $\mathcal{H}$ generado por los subespacios, mutuamente ortogonales, $M \cap N^\perp$ y $N \cap M^\perp$. La restricción de $P - Q$ a $\mathcal{H}_0$ es unitaria, pues:

- si $x \in M \cap N^\perp$, tenemos $(P - Q)(x) = P(x) - Q(x) = P(x) = x$,
- si $x \in N \cap M^\perp$, entonces $(P - Q)(x) = -Q(x) = -x$,

de donde

$$P - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M \cap N^\perp \\ N \cap M^\perp \end{matrix}$$

Por lo tanto, $(P - Q)|_{\mathcal{H}_0} = U$, con $U^2 = I_{\mathcal{H}_0}$ y $U = U^*$. Además, sus autovalores son 1 y -1 , por lo que $\dim \mathcal{H}_0 = \text{tr}(|(P - Q)P_{\mathcal{H}_0}|^2) \leq \text{tr}(|P - Q|^2)$ debe ser finita.

Consideremos ahora el operador $A : N \rightarrow M$ definido por restringir P a $N = Q\mathcal{H}$, es decir, $An = Pn$ para todo $n \in N$. Entonces, $A^* : M \rightarrow N$ es tal que $A^*m = Qm$ para todo $m \in M$, ya que

$$\langle A^*m, n \rangle = \langle m, An \rangle = \langle m, Pn \rangle = \langle m, n \rangle = \langle m, Qn \rangle = \langle Qm, n \rangle.$$

Obviamente, $\ker(A) = N \cap M^\perp$ y $\ker(A^*) = M \cap N^\perp$, y afirmamos que A satisface las hipótesis del Lema 7.14. En efecto,

$$(1_N - A^*A)Q = Q - A^*PQ = Q - QPQ = QP^\perp Q = |P^\perp Q|^2$$

y

$$(1_M - AA^*)P = P - AQP = P - PQP = PQ^\perp P = |Q^\perp P|^2.$$

(pues $A^*A = QPQ|_N$ y $AA^* = PQP|_M$). Puesto que $(P - Q) \in \mathcal{L}^2$, $Q^\perp P = (P - Q)P \in \mathcal{L}^2$ y $P^\perp Q = (Q - P)Q \in \mathcal{L}^2$ (por la Proposición 2.48), y por lo tanto $|Q^\perp P|^2 \in \mathcal{L}^1$ y $|P^\perp Q|^2 \in \mathcal{L}^1$. Entonces podemos aplicar (34) para obtener

$$\begin{aligned} \dim \ker(A) - \dim \ker(A^*) &= \text{tr}(PQ^\perp P) - \text{tr}(QP^\perp Q) = \text{tr}(Q^\perp PQ^\perp) - \text{tr}(QP^\perp Q) \\ &= \text{tr}(Q^\perp(P - Q)Q^\perp) + \text{tr}(Q(P - Q)Q). \end{aligned}$$

Ya que $\dim \ker(A) - \dim \ker(A^*) = \dim(N \cap M^\perp) - \dim(M \cap N^\perp)$, (32) se sigue de la fórmula anterior. ■

7.4. Proyecciones con diagonal en $\text{Lim}^1(\{0, 1\})$.

En esta sección caracterizaremos proyecciones en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuyas diagonales relativas a una base ortonormal dada pertenecen a $\text{Lim}^1(\{0, 1\})$.

Sea $\{e_i\}_{i \geq 1}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra de von-Neumann abeliana maximal de todos los operadores que son diagonalizables por $(e_n)_{n \geq 1}$, y sea $E : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}$ la esperanza condicional que preserva la traza.

Proposición 7.15. *Para cada proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) *La diagonal de P relativa a la base (e_n) pertenece a $\text{Lim}^1(\{0, 1\})$.*
- ii) $E(P) - E(P)^2 \in \mathcal{L}^1$.
- iii) $P \in \mathcal{A} + \mathcal{L}^2$.

La prueba de la Proposición 7.15 requiere de la siguiente fórmula:

Lema 7.16. *Para cada proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tenemos*

$$(35) \quad \text{tr}\left((P - E(P))^2\right) = \text{tr}(E(P) - E(P)^2).$$

Demostración: Tenemos $E(P)e_n = d_n e_n$, donde $d_n = \langle Pe_n, e_n \rangle$. Puesto que $d_n e_n$ es la proyección de Pe_n sobre el espacio de dimensión 1, $\mathbb{C}e_n$, tenemos que

$$\|Pe_n - d_n e_n\|^2 = \|Pe_n\|^2 - \|d_n e_n\|^2 = \langle Pe_n, e_n \rangle - d_n^2 = d_n - d_n^2.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{tr}(P - E(P))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Pe_n - d_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n - d_n^2,$$

y el lado derecho es la traza de $E(P) - E(P)^2$. ■

Demostración: (de la Proposición 7.15). Sea $d = (d_n)_{n \geq 1}$ la diagonal de P relativa a (e_n) , $d_n = \langle Pe_n, e_n \rangle$, $n \geq 1$. Entonces

$$\operatorname{tr}(E(P) - E(P)^2) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n - d_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(1 - d_n),$$

por lo tanto las equivalencias de $i)$ y $ii)$ se siguen de la Proposición 7.7.

$iii) \Rightarrow ii)$ Supongamos primero que la proyección P puede descomponerse en una suma $P = A + T$ donde $A \in \mathcal{A}$ y $T \in \mathcal{L}^2$. Entonces $P - E(P) = T - E(T)$, y $T - E(T) \in \mathcal{L}^2$. Por (35) obtenemos que

$$\operatorname{tr}(E(P) - E(P)^2) = \operatorname{tr}((P - E(P))^2) = \operatorname{tr}((T - E(T))^2) < \infty.$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Supongamos que $\operatorname{tr}(E(P) - E(P)^2) < \infty$, y consideremos el operador $T = P - E(P)$. Por (35) tenemos que

$$\operatorname{tr}(T^2) = \operatorname{tr}(E(P) - E(P)^2) < \infty,$$

de donde $T \in \mathcal{L}^2$. Por lo tanto, $P = E(P) + T \in \mathcal{A} + \mathcal{L}^2$. ■

7.5. Diagonales de operadores en $\mathcal{N}(X)$.

Estamos ahora en condiciones de probar nuestro resultado principal. Sea $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ el conjunto de vértices de un polígono convexo $P \subseteq \mathbb{C}$, y sea $\mathcal{N}(X)$ el conjunto de operadores normales A , que actúan sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable y tienen espectro X con multiplicidad infinita, es decir, $\sigma(A) = \sigma_e(A) = X$.

Fijada una base ortonormal $\{e_n\}_{n \geq 1}$ de $\mathcal{H}$, hay dos condiciones necesarias que una sucesión $d = (d_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$ debe satisfacer para ser la diagonal de un operador $A \in \mathcal{N}(X)$, donde $d_n = \langle Ae_n, e_n \rangle$, $n \geq 1$, a saber:

i) $d_n \in P$, para cada $n \geq 1$.

ii) d tiene una X -descomposición $d = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_N E_N$ en la cual $\sum_{n=1}^{\infty} E_k(n) = \infty$, para cada $1 \leq k \leq N$.

En efecto, las proyecciones P_k que derivan de la representación espectral de A

$$A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_N P_N,$$

tienen diagonales $E_k(n) = \langle P_k e_n, e_n \rangle$ que dan lugar a una X -descomposición con la propiedad $ii)$. Los requisitos $i)$, $ii)$ en una sucesión no garantizan que sea la diagonal de un operador en $\mathcal{N}(X)$. Ahora identificaremos una obstrucción que surge cuando $d \in \operatorname{Lim}^1(X)$.

Teorema 7.17. Sea $X = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ el conjunto de vértices de un polígono convexo $P \in \mathbb{C}$ y sea $d = (d_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos que satisfacen $d_n \in P$, $n \geq 1$, junto con la condición de sumabilidad

$$(36) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f(d_n)| < \infty,$$

donde $f(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_N)$. Entonces $d \in \text{Lim}^1(X)$, y si d es la diagonal de un operador en $\mathcal{N}(X)$, entonces $s(d) = 0$.

Demostración: Por la Proposición 7.7, la condición de sumabilidad (36) caracteriza sucesiones en $\text{Lim}^1(X)$.

Fijemos una base ortonormal $\{e_n\}_{n \geq 1}$ para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y supongamos que existe un operador $A \in \mathcal{N}(X)$ tal que $d_n = \langle Ae_n, e_n \rangle$, $n \geq 1$. Para mostrar que $s(d) = 0$, tenemos que hallar una sucesión $(b_n)_{n \geq 1}$ que toma valores en X , satisfaciendo $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n - b_n| < \infty$, y tenemos que hallar enteros $v_1, \dots, v_N$ que satisfagan $v_1 + \dots + v_N = 0$, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n - b_n = v_1 \lambda_1 + \dots + v_N \lambda_N.$$

Para ello, consideramos el subálgebra abeliana maximal $\mathcal{A}$ de todos los operadores que son diagonalizables para la base $\{e_n\}_{n \geq 1}$. Sea $E : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}$ la esperanza condicional que preserva traza y sea $D = E(A) \in \mathcal{A}$ el operador

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n \otimes e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n \rangle e_n \otimes e_n.$$

Tenemos que encontrar un operador $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}(X)$ tal que $D - B \in \mathcal{L}^1$, y enteros $v_1, \dots, v_N$ que sumen cero tales que

$$(37) \quad \text{tr}(D - B) = v_1 \lambda_1 + \dots + v_N \lambda_N.$$

Estos últimos son obtenidos como sigue: sea

$$A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_N P_N$$

la representación espectral de A , con $\{P_i : 1 \leq i \leq N\}$ un conjunto de proyecciones de rango infinito, mutuamente ortogonales, que suman 1. Entonces tenemos

$$D = E(A) = \lambda_1 E(P_1) + \dots + \lambda_N E(P_N),$$

de modo que $E(P_1), \dots, E(P_N)$ definen una X -descomposición de D . El Teorema 7.11 implica que entonces vemos el operador $E(P_k)$ como sucesión en ℓ^∞ , y tenemos $E(P_k) \in \text{Lim}^1(\{0, 1\})$ para cada $1 \leq k \leq N$.

Afirmamos que existen n proyecciones $Q_1, \dots, Q_N$ en $\mathcal{A}$, mutuamente ortogonales, que tienen suma 1 y que satisfacen

$$(38) \quad E(P_k) - Q_k \in \mathcal{L}^1, \quad 1 \leq k \leq N$$

En efecto, puesto que $E(P_k) \in \text{Lim}^1(\{0, 1\})$ podemos hallar proyecciones $Q_1^0, \dots, Q_N^0 \in \mathcal{A}$ tales que

$$E(P_k) - Q_k^0 \in \mathcal{L}^1, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Considerando a cada Q_k^0 como una sucesión en ℓ^∞ que toma valores en $\{0, 1\}$, la suma $Q_1^0 + \dots + Q_N^0$ es una sucesión tomando valores en $\{0, 1, 2, \dots, N\}$. Consideramos el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^N Q_k^0(n) = 1\} \subseteq \mathbb{N}$. Puesto que $P_1 + \dots + P_N = 1$, tenemos que $E(P_1) + \dots + E(P_N) = 1$, y de aquí

$$1 - \sum_{k=1}^N Q_k^0 = \left(\sum_{k=1}^N E(P_k) \right) - \sum_{k=1}^N Q_k^0 = \sum_{k=1}^N (E(P_k) - Q_k^0) \in \mathcal{L}^1.$$

Entonces

$$\operatorname{tr} \left| 1 - \sum_{k=1}^N Q_k^0 \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{k=1}^N Q_k^0(n) \right| = \sum_{n \in S} \left| 1 - \sum_{k=1}^N Q_k^0(n) \right| + \sum_{n \notin S} \left| 1 - \sum_{k=1}^N Q_k^0(n) \right| < \infty$$

y como si $n \in S$, $\sum_{k=1}^N Q_k^0(n) = 1$ se sigue que $\sum_{n \notin S} \left| 1 - \sum_{k=1}^N Q_k^0(n) \right| < \infty$. Esto último implica que $\mathbb{N} - S$ es un conjunto finito. Definimos $Q_S = \sum_{i \in S} e_i \otimes e_i \in \mathcal{A}$ y notemos que $Q_1^0 \cdot Q_S, \dots, Q_N^0 \cdot Q_S$ son proyecciones ortogonales de traza infinita con suma Q_S . Por lo tanto, si se modifican los $Q_1^0, \dots, Q_N^0$ por:

$$Q_1 = Q_1^0 \cdot Q_S + (1 - Q_S), \quad Q_2 = Q_2^0 \cdot Q_S, \quad \dots \quad Q_N = Q_N^0 \cdot Q_S$$

obtenemos una nueva sucesión de proyecciones $Q_1, \dots, Q_N \in \mathcal{A}$ las cuales son mutuamente ortogonales, que suman 1 y satisfacen (38).

Notemos también que puesto que $\operatorname{tr}(P_k) = \operatorname{rank} P_k = \infty$ para cada k , (38) implica que también $\operatorname{tr}(Q_k) = \operatorname{rank}(Q_k) = \infty$. Se sigue que el operador $B = \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_N Q_N$ pertenece a $\mathcal{A}$, satisface $\sigma(B) = \sigma_e(B) = X$, y por construcción

$$(39) \quad D - B = E(A) - B \in \mathcal{L}^1.$$

Nos queda mostrar que $\operatorname{tr}(D - B)$ satisface (37) para enteros v_k como fueron descritos ahí. En efecto, puesto que $D - B = \sum_{k=1}^N \lambda_k (E(P_k) - Q_k)$ y $E(P_k) - Q_k \in \mathcal{L}^1$, tenemos

$$\operatorname{tr}(D - B) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \operatorname{tr}(E(P_k) - Q_k),$$

así que es suficiente probar que

$$(40) \quad \operatorname{tr}(E(P_k) - Q_k) \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

y que la suma de los N enteros de (40) es cero.

Para probar (40) recordamos el Teorema 7.12. Notemos primero que $P_k - E(P_k) \in \mathcal{L}^2$. En efecto, ya que Q_k es una proyección $(Q_k - E(P_k))^2 = ((Q_k)^2 - E(P_k)^2) = (Q_k - E(P_k))(Q_k + E(P_k))$, y como $E(P_k) - Q_k \in \mathcal{L}^1$, tenemos que $(Q_k - E(P_k))^2 \in \mathcal{L}^1$, y

$$E(P_k) - E(P_k)^2 = (E(P_k) - Q_k) + (Q_k - E(P_k))^2 \in \mathcal{L}^1.$$

Por lo tanto, $\operatorname{tr}(E(P_k) - E(P_k)^2) < \infty$. Y así, por (35)

$$\operatorname{tr}((P_k - E(P_k))^2) = \operatorname{tr}(E(P_k) - E(P_k)^2) < \infty.$$

(Usamos que $\text{tr}(A) = \text{tr}(E(A))$). Puesto que $E(P_k) - Q_k \in \mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{L}^2$, obtenemos

$$P_k - Q_k = (P_k - E(P_k)) + E(P_k) - Q_k \in \mathcal{L}^2, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Por el Teorema 7.12 concluimos que $Q_k P_k Q_k + Q_k^\perp P_k Q_k^\perp - Q_k \in \mathcal{L}^1$, y además,

$$v_k = \text{tr}(Q_k P_k Q_k + Q_k^\perp P_k Q_k^\perp - Q_k) \in \mathbb{Z}.$$

Como $E(\mathcal{L}^1) \subseteq \mathcal{L}^1 \cap A$, y

$$E(Q_k P_k Q_k + Q_k^\perp P_k Q_k^\perp - Q_k) = Q_k E(P_k) Q_k + Q_k^\perp E(P_k) Q_k^\perp - Q_k = E(P_k) - Q_k,$$

hallamos que $E(P_k) - Q_k \in \mathcal{L}^1$ y

$$\text{tr}(E(P_k) - Q_k) = \text{tr}(Q_k P_k Q_k + Q_k^\perp P_k Q_k^\perp - Q_k) = v_k \in \mathbb{Z}.$$

Ya que $\sum_{k=1}^N (E(P_k) - Q_k) = E(1) - 1 = 0$, tenemos $v_1 + \dots + v_N = 0$.

■

7.6. Conclusión, observaciones y un ejemplo.

Señalamos que el Teorema 7.17 se especializa en la afirmación $\Rightarrow$ del Teorema 7.2 ii) para el caso $X = \{0, 1\}$. En efecto, un simple cálculo muestra que para los dos puntos del conjunto $X = \{0, 1\}$ tenemos $K_{\{0,1\}} = \mathbb{Z}$, de modo que $\Gamma_{\{0,1\}} = \mathbb{C}/\mathbb{Z} = \Pi \times \mathbb{R}$. Ahora la hipótesis del Teorema 7.2 ii) es que $a + b < \infty$, donde a y b son definidos por

$$a = \sum_{d_n \leq \frac{1}{2}} d_n \quad \text{y} \quad b = \sum_{d_n > \frac{1}{2}} 1 - d_n.$$

Sea (x_n) la sucesión

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{cuando } d_n \leq 1/2, \\ 1 & \text{cuando } d_n > 1/2. \end{cases}$$

Entonces

$$a + b \text{ es finito} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |d_n - x_n| < \infty \Leftrightarrow d \in \text{Lim}^1(\{0, 1\}).$$

Además, $a - b = \sum_{n=1}^{\infty} d_n - x_n$, de modo que

$$a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow s_{\{0,1\}}(d) = 0.$$

Para el conjunto más general X , la recíproca del Teorema 7.17 dice que:

Sea X el conjunto de vértices de un polígono convexo y sea d una sucesión en $\text{Lim}^1(X)$ tal que $s_X(d) = 0$. Entonces existe un operador $N \in \mathcal{N}(X)$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n \geq 1}$ para $\mathcal{H}$ tal que $d_n = \langle N e_n, e_n \rangle$, $n \geq 1$.

Primero veremos que la recíproca es verdadera cuando X consiste de solo 2 puntos:

Supongamos que $X = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podemos hallar una biyección afín $\varphi : [\lambda_1, \lambda_2] \in \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$, $\varphi(z) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} z - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ (lleva λ_1 a 0 y λ_2 a 1) que manda sucesiones en $\text{Lim}^1(X)$ a sucesiones en $\text{Lim}^1(\{0, 1\})$. Entonces notemos que la función $T \mapsto \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} 1$ lleva

$\mathcal{N}(X)$ a $\mathcal{N}(\{0,1\})$, y nos encontramos en el caso de la implicación $\Leftarrow$ del Teorema 7.2 ii), de donde existe un operador $N \in \mathcal{N}(X)$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n \geq 1}$ para $\mathcal{H}$ tal que $d_n = \langle Ne_n, e_n \rangle$, $n \geq 1$.

Por otro lado, la siguiente proposición muestra que esta recíproca del Teorema 7.17 falla para un conjunto de 3 puntos.

Proposición 7.18. *Sea $X = \{0, 1, i\}$ con $i = \sqrt{-1}$, y consideremos la sucesión*

$$d = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}, 0, 1, i, 0, 1, i, \dots \right) \in \ell^\infty.$$

Entonces d pertenece a $\text{Lim}^1(X)$ y la suma renormalizada $s_X(d) = 0$. Pero no existe un operador normal $N \in \mathcal{N}(X)$ cuya diagonal relativa a una base ortonormal sea d .

Antes de la demostración, recordamos que una matriz doble estocástica, $A = (a_{ij}) \in M_n$ se dice que es ortoestocástica si existe una matriz unitaria $(u_{ij}) \in M_n$ tal que $a_{ij} = |u_{ij}|^2$, $1 \leq i, j \leq n$. Se hace uso del siguiente ejemplo conocido de matriz doble estocástica que no es ortoestocástica.

Lema 7.19. *La matriz $A \in M_3$,*

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

no es ortoestocástica.

Demostración: En efecto, si existiese una matriz unitaria en M_3 , $U = (u_{ij})$ tal que $|u_{ij}|^2 = a_{ij}$ para todo i, j , entonces U debe tener la forma

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$$

con entradas complejas que satisfacen $|a| = |b| = |c| = |d| = |e| = |f| = 1$. Pero las filas de tal matriz no pueden ser entonces mutuamente ortogonales. ■

Demostración: (de la Proposición 7.18) Por cálculo sencillo se ve que el conjunto $X = \{0, 1, i\}$, el grupo K_X y el grupo de obstrucción Γ_X son dados por $K_X = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, $\Gamma_X = \mathbb{C}/K_X \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^2$.

Sea x la sucesión $x = (0, 0, 0, 0, 1, i, 0, 1, i, \dots)$. Obviamente, $x_n \in X$ para cada $n \geq 1$, y $d_n = x_n$ excepto para $n = 1, 2, 3$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1+i}{2} = 1 + i \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = K_X.$$

Por lo tanto, $d \in \text{Lim}^1(X)$ y $s_X(d) = 0$.

Cada operador $N \in \mathcal{N}(X)$ tiene la forma $N = P + iQ$, donde P, Q son proyecciones de rango infinito, mutuamente ortogonales, tales que $1 - (P + Q)$ tienen rango infinito. Supongamos que existe un tal operador N cuya matriz relativa a alguna base ortonormal $\{e_n\}_{n \geq 1}$ tiene diagonal $d = (d_n)_{n \geq 1}$, y lleguemos a una contradicción. Sea $p, q \in \ell^\infty$ la parte real e imaginaria de la sucesión d

$$p = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots \right) \quad \text{y} \quad q = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots \right).$$

Puesto que d es la diagonal de $P + iQ$, podemos equiparar parte real e imaginaria para obtener $p_n = \langle Pe_n, e_n \rangle$ y $q_n = \langle Qe_n, e_n \rangle$, $n \geq 1$.

Ahora, para $n \geq 4$, p_n y q_n son ambos valores $\{0, 1\}$. Puesto que P y Q son proyecciones, se sigue que

$$Pe_n = p_n e_n \quad \text{y} \quad Qe_n = q_n e_n, \quad n \geq 4,$$

y en particular, P y Q ambos dejan el espacio lineal cerrado generado $[e_4, e_5, \dots]$ invariante. Por lo tanto, deja su complemento ortogonal $[e_1, e_2, e_3]$ invariante.

Sean P_0, Q_0 las restricciones de P, Q , respectivamente, a $\mathcal{H}_0 = [e_1, e_2, e_3]$. P_0 y Q_0 son proyecciones mutuamente ortogonales y la diagonal de sus matrices relativas a la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ y son $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Cada una de las dos diagonales suman 1, por lo tanto, P_0 y Q_0 son de dimensión 1.

Además, $R_0 = 1_{\mathcal{H}_0} - (P_0 + Q_0)$ es una proyección de dimensión 1 en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ cuya diagonal relativa a la bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la matriz perteneciente a M_3 cuyas filas son las diagonales de las tres proyecciones P_0, Q_0, R_0 tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos elegir vectores unitarios f_1, f_2, f_3 de manera que $P_0 = [f_1]$, $Q_0 = [f_2]$ y $R_0 = [f_3]$. Tenemos entonces que f_1, f_2, f_3 son una segunda base ortonormal de $\mathcal{H}_0$,

$$A = \begin{bmatrix} |\langle e_1, f_1 \rangle|^2 & |\langle e_2, f_1 \rangle|^2 & |\langle e_3, f_1 \rangle|^2 \\ |\langle e_1, f_2 \rangle|^2 & |\langle e_2, f_2 \rangle|^2 & |\langle e_3, f_2 \rangle|^2 \\ |\langle e_1, f_3 \rangle|^2 & |\langle e_2, f_3 \rangle|^2 & |\langle e_3, f_3 \rangle|^2 \end{bmatrix} = (|u_{ij}|^2),$$

donde (u_{ij}) es una matriz unitaria en M_3 . Esto contradice el Lema 7.19. ■

La Proposición 7.18 muestra que la condición necesaria $s_X(d) = 0$ no es suficiente para que una sucesión $d \in \text{Lim}^1(X)$ sea diagonal de un operador en $\mathcal{N}(X)$ cuando X contiene más de 2 puntos.

Referencias

- [1] Antezana, J., Massey, P., Ruiz, M.; Stojanoff, D., *The Schur-Horn Theorem for operators and frames with prescribed norms and frame operator*, Illinois J of Math. 51 (2007), no. 2, 537-560.
- [2] J.A. Antezana, D. Stojanoff. *Análisis Matricial*, Cursos y Seminarios de Matemática - Serie B. Depto. de Matemática - FCEyN - UBA, 2008. 297 pp.
- [3] Arveson, W. *Diagonals of normal operators with finite spectrum*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 104 (2007), no. 4, 1152-1158.
- [4] Arveson, W. and Kadison, R. V., *Diagonals of self-adjoint operators. Operator theory, operator algebras, and applications*. 247-263, Contemp. Math., 414, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006
- [5] R. Bhatia, *Matrix analysis*. Graduate Texts in Mathematics, 169. Springer-Verlag, New York, 1997. xii+347 pp.
- [6] K.R. Davidson, *C*-algebras by example*. Fields Institute Monographs, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. xiv+309 pp.
- [7] R. Kadison., *The Pythagorean theorem I: the finite case*, Proc. N.A.S. (USA), 99(7):4178-4184, 2002.
- [8] R. Kadison, *The Pythagorean theorem II: the infinite discrete case* Proc. N.A.S. (USA), 99(8):5217-5222, 2002.
- [9] G.J. Murphy, *C*-algebras and operator theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990. x+286 pp.
- [10] A. Neumann., *An infinite-dimensional generalization of the Schur-Horn convexity theorem*, Jour. Funct. Anal., 161(2):418-451, 1999.