Complementos de Análisis (2021)

Eduardo Ghiglioni y Pedro Massey

Contents

1 Números y más números (en construcción)

En esta sección formalizamos la base sobre la cual se desarrolla el resto del curso: los números reales. En los procesos de formalización es usual asumir una serie de afirmaciones básicas (axiomas) y construir la teoría desde estas afirmaciones básicas. En nuestro caso, nuestras afirmaciones básicas tienen que ver con los números naturales $\mathbb{N}$. Una vez que asumimos estas afirmaciones sobre $\mathbb{N}$, el resto de los números ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) surgen de construcciones explícitas que realizaremos con cierto detalle. De forma similar, las propiedades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ que vamos a considerar estarán justificadas (probadas) a partir de las propiedades que hemos asumido de $\mathbb{N}$.

En lo que sigue, vamos a dejar varios detalles para el lector y en esos casos escribimos $\square$. Una vez que el lector complete estos detalles (es muy recomendable hacer esto, porque colabora con la compresión detallada del contenido del texto) el lector puede pintar el cuadradito de forma que quede el famoso símbolo $\blacksquare$ de detalle resuelto ó prueba concluida.

1.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Comenzamos asumiendo que contamos con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en el que está definida una operación binaria que denotamos $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que tiene las siguientes propiedades: para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$:

- S1. Asociatividad: $n + (m + p) = (n + m) + p$.
- S2. Conmutatividad: $n + m = m + n$.
- S3. Existencia de neutro: $0 + n = n$.
- S'4. Cancelación: $n + m = n + p \implies m = p$.

En este caso decimos que $\mathbb{N}$ es un monoide abeliano cancelativo. La asociatividad nos permite escribir expresiones del tipo $m_1 + \ldots + m_n$ sin ambigüedad (notar que debemos elegir alguna forma para asociar los términos para poder sumar: pero la suma no depende de cómo asociamos!)

Además, $\mathbb{N}$ posee una relación de orden " $\leq$ " compatible con la estructura anterior:

- O1. $n \leq m$ si y solo si existe p tal que $n + p = m$.
- O2. Si $n \leq m$ entonces $n + p \leq m + p$.
- O3. Dados n, $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $n \leq m$ ó $m \leq n$.
- O4. Si $A \subset \mathbb{N}$ es no vacío entonces A tiene un primer elemento.

Hasta aquí hemos considerado las propiedades de $\mathbb{N}$ que vamos a asumir como ciertas. En adelante, vamos a construir y justificar con cierto detalle todo lo que hagamos!

Podemos definir otra operación binaria $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $n \cdot m = 0$ si $n = 0$ ó

$$n \cdot m = \underbrace{m + \ldots + m}_{\text{suma de } n \text{ términos}} \in \mathbb{N}\,.$$

Lo anterior define el producto que verifica (un gran $\square$): para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$

P1. Asociatividad: $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$.

P2. Conmutatividad: $n \cdot m = m \cdot n$.

P3. Existencia de neutro: $1 \cdot n = n$.

P4. si $n \cdot m = 0$ entonces $n = 0$ ó $m = 0$.

P5. Si $m \leq p$ entonces $n \cdot m \leq n \cdot p$.

D. Distributividad: $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$.

La propiedad P4. implica la simplificación: si $n \neq 0$ y $n \cdot m = n \cdot p$ entonces $m = p$.

A partir de $\mathbb{N}$ podemos *construir* $\mathbb{Z}$ de la siguiente forma: consideramos $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : n,\, m \in \mathbb{N}\}$. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = p + n \in \mathbb{N}\,.$$

(notemos que la *suma* en la definición anterior es la suma en $\mathbb{N}$, que es la *única* operación de suma que tenemos definida). Es sencillo verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia (acá se usa la propiedad de cancelación, $\square$). Consideramos entonces el conjunto cociente

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim\; = \{[(m, n)] \;:\; m,\, n \in \mathbb{N}\}\,,$$

donde $[(m, n)]$ denota la clase de equivalencia de (m, n) según $\sim$.

En este caso podemos definir una operación binaria $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$[(m, n)] + [(p, q)] = [(m + p, n + q)] \in \mathbb{Z}\,.$$

Notemos que la operación en $\mathbb{Z}$ queda definida en función de la suma en $\mathbb{N}$ (ejercicio! sugerencia: recordemos que hemos aceptado la existencia de $\mathbb{N}$ con todas sus propiedades). En este caso, se verifica que la suma en $\mathbb{Z}$ verifica las propiedades de monoide S1.-S3 ($\square$), donde el neutro $0_{\mathbb{Z}} = [(0, 0)] = [(n, n)]$, para $n \in \mathbb{N}$. Además, si $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$ existe el opuesto $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$ tal que

$$[(m, n)] + [(n, m)] = [(m + n, m + n)] = [(0, 0)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

En este caso escribimos $[(n, m)] = -[(m, n)]$, que determina una operación 1-aria en $\mathbb{Z}$. Así, vale

S4. Si $x \in \mathbb{Z}$ existe $-x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + -x = 0$.

La existencia opuesto y las propiedades anteriores hacen de $\mathbb{Z}$ un grupo abeliano conmutativo (en donde vale, en particular, la cancelación!). Además, si $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ está dada por $\rho(n) = [(n, 0)] \in \mathbb{Z}$ entonces ρ verifica:

$$\rho(x) = 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ y } \quad \rho(m + n) = \rho(m) + \rho(n)\,.$$

En este caso ρ es una función inyectiva que permite identificar n con $\rho(n) \in \mathbb{Z}$. De esta forma, en adelante, consideramos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ vía la identificación dada por ρ.

Más aún, notemos que $-\rho(n) = -[(n,0)] = [(0,n)]$ de forma que todo elemento en $\mathbb{Z}$ se puede escribir

$$[(m,n)] = [(m,0)] + [(0,n)] = \rho(m) + (-\rho(n)) = \rho(m) - \rho(n)\,.$$

Podemos definir un producto en $\mathbb{Z}$ dado por $[(m,n)]\cdot[(p,q)] = [(mp+nq, mq+np)]$, que resulta verificar las propiedades P1.-P3. en $\mathbb{Z}$. Además, vale que

$$[(m,n)]\cdot[(p,q)] = 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow [(m,n)] = 0_{\mathbb{Z}} \quad \text{ó} \quad [(p,q)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

La propiedad anterior garantiza la simplificación: si $[(m,n)] \neq 0_{\mathbb{Z}}$ entonces:

$$[(m,n)]\cdot[(p,q)] = [(m,n)]\cdot[(r,s)] \implies [(p,q)] = [(r,s)]\,.$$

Por otro lado, también se verifica la propiedad D (distributiva) en $\mathbb{Z}$.

Finalmente, definimos el orden en $\mathbb{Z}$ dado por: si $a,\, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a \leq b$ si $b-a \in \mathbb{N}(\subset \mathbb{Z})$. En este caso se verifican las propiedades O2 y O3 en $\mathbb{Z}$. Además, se verifica P5 siempre que $n \in \mathbb{N}$ (todo lo anterior es un súper $\square$!). Además, ρ respeta las operaciones suma, producto, el neutro de la suma y del producto; ρ también respeta el orden en $\mathbb{N}$. De esta forma, $\mathbb{N}$ se identifica completamente con $\rho(\mathbb{N})$, lo cual hace más claro que la inclusión $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ está bien propuesta.

Obs 1.1. Notemos que esta versión que hemos construido de $\mathbb{Z}$ describe a $\mathbb{Z}$ como un espacio cociente. Esto contrasta un poco con la idea que uno tiene de $\mathbb{Z}$ como *números*. Sin embargo, una vez establecidas las propiedades usuales de $\mathbb{Z}$ en esta construcción particular, podemos pensar a $\mathbb{Z}$ nuevamente como números: es decir, lo importante no es la naturaleza de los elementos de $\mathbb{Z}$ (por ejemplo) sino las relaciones entre estos elementos (la existencia de las operaciones que satisfacen las propiedades que estamos acostumbrados a usar de $\mathbb{Z}$). $\triangle$

Y ya que estamos, seguimos *construyendo* $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$. Definimos $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y consideramos una relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p,q) : \ p \in \mathbb{Z}\,,\, q \in \mathbb{Z}^*\}$ dada por

$$(p,q) \approx (r,s) \Leftrightarrow p\cdot s = r\cdot q\,.$$

(notemos que el producto en la definición anterior es el producto en $\mathbb{Z}$, que hemos construido previamente). Una vez verificado el hecho de que $\approx$ es una relación de equivalencia (ejercicio!), podemos considerar el conjunto cociente

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\approx\, = \{\overline{(p,q)} \ : \ p,q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0\}\,.$$

donde $\overline{(p,q)}$ denota la clase de equivalencia de (p,q) con respecto a la relación $\approx$. En este caso, podemos definir las operaciones binarias

$$\overline{(p,q)} + \overline{(r,s)} = \overline{(s\cdot p + q\cdot r, q\cdot s)} \quad \text{y} \quad \overline{(p,q)}\cdot\overline{(r,s)} = \overline{(p\cdot r, q\cdot s)}\,.$$

En este contexto, la suma en $\mathbb{Q}$ queda bien definida y verifica S1.-S3. (aquí el neutro de la suma es $0_{\mathbb{Q}} = \overline{(0,1)}$) y el producto verifica las propiedades P1.-P4 (y el neutro del producto es $1_{\mathbb{Q}} = \overline{(1,1)}$). Además, si $\overline{(p,q)} \in \mathbb{Q}$ entonces $\overline{(-p,q)} \in \mathbb{Q}$ es tal que $\overline{(p,q)} + \overline{(-p,q)} = 0_{\mathbb{Q}}$ y escribimos $\overline{(-p,q)} = -\overline{(p,q)}$. De esta forma todo elemento de $\mathbb{Q}$ tiene opuesto aditivo y la suma en $\mathbb{Q}$ corresponde a una operación de grupo abeliano. Por otro lado, si $\overline{(p,q)} \neq 0_Q$ (es decir, $p \neq 0$) entonces $\overline{(q,p)} \in \mathbb{Q}$ es tal que $\overline{(p,q)}\cdot\overline{(q,p)} = 1_{\mathbb{Q}}$ y en este caso escribimos $\overline{(q,p)} = \overline{(p,q)}^{-1}$. Así, vale

P4'. Existencia de inverso: si $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, entonces existe $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{Q}}$.

Es decir, todo elemento no nulo admite un inverso multiplicativo. De esta forma, $\mathbb{Q}$ verifica S1.-S4. y P1.-P3, P4' y D. En este caso, decimos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo (un gigantesco $\square$). Más adelante vamos a re-escribir la definición de cuerpo.

Además, podemos definir un orden en $\mathbb{Q}$ de la siguiente forma. Sea $P = \{\overline{(p,q)} \ : \ p,\, q \in \mathbb{N},\, p \neq 0,\, q \neq 0\}$; en este caso definimos

$$\overline{(p,q)} \leq \overline{(r,s)} \Leftrightarrow \quad \overline{(p,q)} = \overline{(r,s)} \quad \text{ó} \quad \overline{(p,q)} \neq \overline{(r,s)} \quad \text{y} \quad \overline{(r,s)} - \overline{(p,q)} \in P\,.$$

En este caso, se verifica que la relación anterior es un orden que resulta compatible con la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$: si $x \leq z$ en $\mathbb{Q}$ entonces $x + w \leq z + w$ para todo $w \in \mathbb{Q}$; por otro lado, si $w \in P$ entonces $x \cdot w \leq z \cdot w$. También se verifica la tricotomía: si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $x > 0$ ó $x = 0$ ó $x < 0$. En este caso decimos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

Finalmente, si consideramos $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $\gamma(p) = \overline{(p,1)} \in \mathbb{Q}$ entonces γ es una función inyectiva que respeta toda la estructura de $\mathbb{Z}$ que hemos considerado: la suma, el producto y el orden (verificar!). En este sentido es que podemos identificar $p \in \mathbb{Z}$ con $\gamma(p) \in \mathbb{Q}$ y considerar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, cosa que haremos de aquí en adelante.

En este punto podemos hacer una observación similar a la Obs. 1.1. Por otro lado, cabe mencionar que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo dotado de un orden que tiene algunas deficiencias para poder hacer análisis. Por ejemplo, aplicando el teorema fundamental de la aritmética se verifica que no existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = 2$. En este sentido, la función $f(x) = (x^2 - 2)^2$ definida en los $x \in C := \{t \in \mathbb{Q} : 0 \leq t \leq 2\}$ no tiene un mínimo! En lo que sigue vamos a *completar* $\mathbb{Q}$, esencialmente *construyendo* los puntos que le faltan para llegar a ser $\mathbb{R}$. Este proceso de completación puede ser pensado desde muchos puntos de vista distintos. Nosotros vamos a considerar el punto de vista que corresponde a la propiedad de existencia de supremos de conjuntos no vacíos y acotados superiormente. Para formalizar esto, consideramos los siguientes conceptos.

1.2 Conjuntos ordenados

Recordemos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ es un conjunto A en donde hay definida una relación de orden (que es reflexiva, antisimétrica y transitiva). En este caso notamos $a < b$ siempre que $a \leq b$ y $a \neq b$.

Definición 1.2. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $E \subset A$.

1. Decimos que E está acotado superiormente si existe $x \in A$ tal que $x \geq e$ para todo $e \in E$; en este caso, decimos que x es una cota superior de E. Definimos el conjunto de cotas superiores

   $$CS(E) = \{x \in A \ : \ x \ \text{ es cota superior de } \ E\} \subset A\,.$$

   Notemos que por hipótesis, $CS(E) \neq \emptyset$.

   De forma análoga, decimos que E está acotado inferiormente si existe $x \in A$ tal que $x \leq e$ para todo $e \in E$; y en este caso decimos que x es cota inferior de E. Definimos

   $$CI(E) = \{x \in A \ : \ x \ \text{ es cota inferior de } \ E\} \neq \emptyset\,.$$

2. Si E está acotado superiormente ($CS(E) \neq \emptyset$) decimos que $\alpha \in A$ es el supremo de E, y notamos $\alpha = \sup E$, si

   (a) $\alpha \in CS(E)$;

   (b) Si $\beta \in CS(E)$ entonces $\alpha \leq \beta$

   Es decir, α es la mínima cota superior de E.

3. Si E está acotado inferiormente ($CI(E) \neq \emptyset$) decimos que $\gamma \in A$ es el ínfimo de E, y notamos $\gamma = \inf E$, si

   (a) $\gamma \in CI(E)$;

   (b) Si $\beta \in CI(E)$ entonces $\beta \leq \gamma$

   Es decir, γ es la máxima cota inferior de E.

$\triangle$

Ejemplos 1.3. Consideremos a $\mathbb{Q}$ con el orden que hemos construido. En este caso:

1. Si $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x < 0\}$ entonces $CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0\}$ y $\sup E = 0 \notin E$.

2. Si $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \leq 0\}$ entonces $CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0\}$ y $\sup E = 0 \in E$.

3. Sea $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ 0 \leq x \ , \ x^2 \leq 2\}$ y veamos que este conjunto no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (recordemos que $\nexists a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$). Por un lado, E está acotado superiormente y más aun,

$$CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ , \ x^2 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ , \ x^2 > 2\} \, .$$

   Para verificar lo anterior basta ver que si $e \in E$ ($0 \leq e$ y $e^2 < 2$) y

$$d = e - \frac{e^2 - 2}{e + 2} = \frac{2e + 2}{e + 2} > e \implies d^2 - 2 = \frac{2(e^2 - 2)}{(e + 2)^2} < 0 \, .$$

   Es decir, $e < d \in E$. Lo anterior indica que si $x \geq 0$ es tal que $x^2 < 2$ entonces $x \in E$ y $x \notin CS(E)$ (completar los detalles para la igualdad de conjuntos de arriba $\square$).

   Por otro lado, si $p \in CS(E)$ entonces $p \geq 0$ y $p^2 > 2$. En este caso, $q = p - \frac{p^2-2}{p+2} < p$ y vale que

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} > 0 \implies q \in CS(E) \, .$$

   Así, no puede haber una mínima cota superior.

Definición 1.4. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Decimos que A tiene la propiedad de la mínima cota superior si para todo $E \subset A$, tal que $E \neq \emptyset$ y esté acotado superiormente, se verifica que existe $\sup E \in A$. $\triangle$

Recordemos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ se dice *totalmente ordenado* si dados x, $y \in A$ se verifica que $x \leq y$ ó $y \leq x$.

Proposición 1.5. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado con la propiedad de la mínima cota superior. Si $E \subset A$, $E \neq \emptyset$ está acotado inferiormente entonces existe $\alpha = \inf E \in A$. Más aún, $\alpha = \sup CI(E)$.*

Demostración. Notemos que por hipótesis $CI(E) \neq \emptyset$; además, como $E \neq \emptyset$ podemos tomar un elemento $e \in E$: en este caso, si $b \in CI(E)$ entonces $b \leq e$. Así, $e \in CS(CI(E))$ es una cota superior para $CI(E) \subset A$. Por hipótesis, existe $\alpha = \sup CI(E)$.

Si $e \in E$ entonces, como $E \subseteq CS(CI(E))$ (ver el párrafo anterior) vemos que $\alpha \leq e$, porque α es el mínimo del conjunto $CS(CI(E))$. Así, $\alpha \in CI(E)$.

Supongamos que $d \in A$ es tal que $\alpha < d$; entonces $d \notin CI(E)$, porque $\alpha \in CS(CI(E))$. Así, si $f \in CI(E)$ entonces $\alpha \not< f$, de forma que $\alpha \geq f$ (porque A está totalmente ordenado). Lo anterior muestra que α es el máximo de $CI(E)$. ■

1.3 Cuerpos

Hemos construido $\mathbb{Q}$ de forma que resulta un cuerpo ordenado. Más adelante vamos a construir $\mathbb{R}$ de forma que también resulte un cuerpo ordenado. En general, hay varios argumentos algebraicos que estamos acostumbrados a usar en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ que son válidos en cualquier cuerpo. En lo que sigue recordamos las propiedades formales de un cuerpo y deducimos varios de estos argumentos algebraicos formalmente, usando las propiedades de la definición de cuerpo (spoiler alert: se viene un festival de ejercicios para el lector).

Definición 1.6. Un cuerpo es una terna $(F, +, \cdot)$ tal que F es un conjunto, $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias en F (denominadas suma y multiplicación) que satisfacen los siguientes axiomas:

Axiomas para la suma: para todos a, b, $c \in F$

S1. $a + b \in F$ (la operación es cerrada en F ó bien definida).

S2. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

S3. $a + b = b + a$.

S4. $\exists 0 \in F$ tal que $a + 0 = a$.

S5. $\exists -a \in F$ tal que $a + -a = 0$.

Axiomas para la multiplicación: para todos a, b, $c \in F$

M1. $a \cdot b \in F$ (la operación es cerrada en F ó bien definida).

M2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

M3. $a \cdot b = b \cdot a$.

M4. $\exists 1 \in F$, $1 \neq 0$, tal que $a \cdot 1 = a$.

M5. Si $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Ley distributiva : para todos a, b, $c \in F$

D. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

△

Obs 1.7. Sea F un cuerpo: en adelante *convenimos* en usar las siguientes notaciones:

$$a - b = a + -b \ , \ \ a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ , \ \ na = a + \ldots + a \,, \qquad n \geq 1 \text{ términos}$$

$$a^0 = 1 \ \ , \ \ a^n = a \cdots a \,, \qquad n \geq 1 \text{ factores} \qquad , \ \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1} \,.$$

$\triangle$

Es conveniente recordar que hay cuerpos que son bien distintos de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$: por ejemplo, recordemos que $\mathbb{Z}_5$ (los enteros módulo 5) con la suma y el producto

$$[n] + [m] = [n + m] \quad \text{ y } \quad [n] \cdot [m] = [n \cdot m]$$

donde $[n]$ denota la clase módulo 5 para $n \in \mathbb{Z}$, es un cuerpo (finito).

Las siguientes reglas valen en *todo* cuerpo.

Proposición 1.8. *Sea $(F, +)$ un conjunto dotado de una operación binaria $+$, que satisface los axiomas S1.-S5. Si x, y, $z \in F$ entonces vale que*

1. $x + y = x + z \implies y = z$ *(cancelación).*
2. $x + y = x \implies y = 0$ *(unicidad del neutro).*
3. $x + y = 0 \implies y = -x$ *(unicidad del opuesto).*
4. $-(-x) = x$.

Demostración. Para verificar 1. usamos los axiomas

$$y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z$$

donde usamos S4 y S3, S5, S2, la hipótesis, y desandamos el camino anterior. Notemos que 2. es un caso particular del ítem 1.: $x + y = x = x + 0$ entonces $y = 0$. Lo mismo 3: $x + y = 0 = x + -x$ implica que $y = -x$, por el ítem 1. Finalmente, $-x + -(-x) = 0 = -x + x$ implica $-(-x) = x$, otra vez por el ítem 1. $\blacksquare$

Proposición 1.9. *Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo. Si x, y, $z \in F$ entonces vale que*

1. $x \cdot 0 = 0$.
2. *Si* $x \neq 0$, $y \neq 0$ *entonces* $x \cdot y \neq 0$.
3. *Si* $x \neq 0$: $x \cdot y = x \cdot z \implies y = z$ *(simplificación).*
4. *Si* $x \neq 0$: $x \cdot y = x \implies y = 1$ *(unicidad de la unidad).*
5. *Si* $x \cdot y = 1 \implies x \neq 0$, $y = x^{-1}$ *(unicidad del inverso).*
6. *Si* $x \neq 0$: $(x^{-1})^{-1} = x$.
7. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.
8. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Demostración. Para ver 1. notemos que $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$; cancelando se tiene que $x \cdot 0 = 0$. Para ver 2., si $x \neq 0$ pero $x \cdot y = 0$ entonces como $x \cdot 0 = 0$, se tiene que $x \cdot y = x \cdot 0$ y por simplificación, que $y = 0$. Los items 3 -8 son ejercicio ($\square$). ■

Definición 1.10. Un cuerpo ordenado es un cuerpo $(F, +, \cdot)$ junto con un subconjunto $P \subset F$ (llamado el cono estrictamente positivo) que satisface:

P1. Para todo $a \in F$ vale una y solo una de las siguiente condiciones:

$$a \in P \quad \text{ó} \quad -a \in P \quad \text{ó} \quad a = 0\,.$$

P2. Si a, $b \in P$ entonces $a + b \in P$.

P3. Si a, $b \in P$ entonces $a \cdot b \in P$.

En este caso definimos el orden inducido por P: dados a, $b \in F$ entonces

$$a \leq b \quad \text{si y solo si} \quad a = b \quad \text{ó} \quad b - a \in P\,.$$

Obs 1.11. Sea F un cuerpo ordenado y sea $P \subset F$ el cono estrictamente positivo. Entonces el orden inducido por P es (efectivamente) una relación de orden total. Notemos que $x \leq x$ vale por definición; por otro lado, si $x \leq y$, $y \leq x$ entonces: si $x \neq y$ se tiene que $y - x \in P$ y $x - y = -(y - x) \in P$, que contradice P1 (con $a = y - x$). Así, $x = y$ necesariamente. Finalmente, la transitividad es consecuencia de P2, (ejercicio $\square$).

Además, el orden es total: sean a, $b \in F$: si $a = b$ entonces $a \leq b$; si $a \neq b$ entonces $b - a \neq 0$ y se debe verificar (por P1.) que: $b - a \in P$ en cuyo caso $a \leq b$ ó $-(b - a) = a - b \in P$ en cuyo caso $b \leq a$. △

Ejemplo 1.12. Notemos que $P = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0\} \subset \mathbb{Q}$ verifica las propiedades de las definición anterior. De hecho, el orden inducido por P coincide con el orden usual en $\mathbb{Q}$ que hemos introducido en su construcción. En particular, el orden en $\mathbb{Q}$ es total. △

Proposición 1.13. *Sea F un cuerpo ordenado con cono estrictamente positivo $P \subset F$. Entonces*

1. $P = \{x \in F : \ x \neq 0 \ , \ x \geq 0\} = \{x \in F : \ x > 0\}$.
2. *Si $y \geq z$ entonces $x + y \geq x + z$, para $x \in F$.*
3. *Si $x \geq 0$, $y \geq z$ entonces $x \cdot y \geq x \cdot z$.*
4. *Si $x \leq 0$, $y \geq z$ entonces $x \cdot y \leq x \cdot z$.*
5. *Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en particular, $1 \cdot 1 = 1 > 0$).*
6. *Si $0 < x \leq y$ entonces $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.*

Demostración. Notemos que $x \geq 0$ si y solo si $x = 0$ ó $x - 0 = x \in P$. Así, si $x \geq 0$ y $x \neq 0$ entonces $x \in P$. Recíprocamente, si $x \in P$ entonces $x \neq 0$ (por P1) y $x - 0 = x \in P$ implica que $x \geq 0$; lo anterior prueba el item 1.

Para ver 2. si $y \geq z$ entonces $y = z$ ó $y - z \in P$. Si $y = z$ entonces $x + y = x + z$ y vale que $x + y \geq x + z$; si $y - z \in P$ entonces $(x + y) - (x + z) = y - z \in P$ que muestra que $x + y \geq x + z$.

Para ver 3. notemos que si $x = 0$ ó $y = z$ entonces la conclusión vale de forma trivial. Así, podemos suponer que $x \in P$ y $y - z \in P$: en este caso por P3. se tiene que $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z \in P$, que muestra que $x \cdot y \geq x \cdot z$.

Los items 4, 5 y 6. se verifican con argumentos similares, ejercicio $\square$. ■

Hay otras formas posibles de definir un orden en un cuerpo, tal que este orden sea compatible con la estructura algebraica. Acá va otra:

Proposición 1.14. *Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo y sea $\leq$ una relación de orden total en F que satisface:*

O1. Si $y > z$ entonces $y + x > z + x$, para todo $x \in F$.

O2. Si $0 < x$, $0 < y$ entonces $0 < x \cdot y$.

Si definimos $P = \{x \in F : \ 0 < x\}$ entonces P resulta un cono estrictamente positivo en F tal que el orden inducido por P (que lo notamos $\leq_P$ para no confundir) coincide con $\leq$.

Demostración. Ejercicio $\square$.

En lo que sigue decimos que un cuerpo $(F, +_F, \cdot_F)$ contiene al cuerpo $(K, +_K, \cdot_K)$ si existe una función $\Phi : K \to F$ que respeta la estructura de K: $\Phi(0_K) = 0_F$, $\Phi(1_K) = 1_F$, $\Phi(x +_K y) = \Phi(x) +_F \Phi(y)$, $\Phi(x \cdot_K y) = \Phi(x) \cdot_F \Phi(y)$, para todos x, $y \in K$. Notar que una tal función debe ser inyectiva. En efecto: notemos primero que si $x \in K$, $x \neq 0$ entonces

$$1_F = \Phi(x \cdot_K x^{-1}) = \Phi(x) \cdot_F \Phi(x^{-1})$$

que muestra que $\Phi(x) \neq 0_F$ (que $\Phi(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1}$ es decir, Φ respeta los inversos). Así, si $\Phi(x) = \Phi(y)$ entonces $\Phi(x - y) = 0_F$ y $x - y = 0_K$, es decir $x = y$. Si además F y K son cuerpos ordenados con conos P_F y P_K pedimos que se verifique: $x \in P_K$ si y solo si $\Phi(x) \in P_F$.

Ahora podemos desarrollar la construcción tan esperada de $\mathbb{R}$, junto con las propiedades derivadas de su construcción.

Teorema 1.15. *Existe un cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo (ordenado) y tal que el orden en $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.*

Demostración. Vamos a desarrollar la prueba en pasos. Comenzamos definiendo $\mathbb{R}$ como conjunto, a través de una descripción de sus elementos (que son llamados cortaduras).

Paso 1: Una cortadura es cualquier subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ con las siguientes propiedades:

C1. $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

C2. Si $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$ entonces $q \in \alpha$.

C3. Si $p \in \alpha$ entonces existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$.

Cabe aclarar que el orden que figura en C2. y C3. es el orden de $\mathbb{Q}$, como lo hemos construido. En adelante seguimos la siguiente convención: $p, q, r \in \mathbb{Q}$ mientras que α, β, γ son cortaduras.

Ya podemos definir $\mathbb{R}$ como conjunto: $\mathbb{R}$ es el conjunto formado por todas las cortaduras. Si $p \in \mathbb{Q}$ entonces definimos $p^* = \{q \in \mathbb{Q} : \ q < p\}$ y es sencillo verificar que p^* es una cortadura (es decir, $p^* \in \mathbb{R}$) $\Box$.

En este paso definimos además una relación de orden en $\mathbb{R}$: dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha \subseteq \beta$ (acá usamos que las cortaduras son, formalmente, conjuntos). Es claro que lo anterior define un orden.

Veamos que el orden es total: sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\beta \not\leq \alpha$ (es decir, $\beta \not\subseteq \alpha$). En este caso, existe $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. Como $\alpha \neq \emptyset$ (por C1.), sea $q \in \alpha$ arbitrario; entonces $p \not\leq q$, porque de otra forma $p \leq q$ y luego $p \in \alpha$ (por C2.). Así, como el orden en $\mathbb{Q}$ es total, vemos que $q \leq p$ que muestra que $q \in \beta$ (por C2.). Lo anterior muestra $q \in \alpha \implies q \in \beta$ y entonces $\alpha \subseteq \beta$; es decir, $\alpha \leq \beta$.

Paso 2. Veamos que $(\mathbb{R}, \leq)$ tiene la propiedad de la mínima cota superior. Sea $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y tal que E está acotado superiormente. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de E, es decir tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\alpha \in E$. Definimos

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha = \{p \in \mathbb{Q} : \ \exists \alpha \in E \ , \ p \in \alpha\} .$$

Veamos que γ es una cortadura:

C1: $\gamma \neq \emptyset$, porque si $\alpha \in E$ ($E \neq \emptyset$) entonces $\emptyset \neq \alpha \subseteq \gamma$. Además, como $\beta \in \mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \notin \beta$; notemos que si $\alpha \in E$ entonces $\alpha \subseteq \beta$ y luego $\gamma \subseteq \beta$ (por Álgebra I, ejercicio). En particular, $r \notin \gamma$ y $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

C2: Sea $p \in \gamma$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$: por definición de γ, existe $\alpha \in E$ tal que $p \in \alpha$; pero entonces por C2 para α vemos que $q \in \alpha$. Finalmente, como $\alpha \subseteq \gamma$, $q \in \gamma$.

C3: Sea $p \in \gamma$; por definición de γ, existe $\alpha \in E$ tal que $p \in \alpha$; pero entonces, por C3. para α, existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$. Otra vez, podemos ver que $r \in \gamma$ y estamos.

Claramente, $\alpha \leq \gamma$, para todo $\alpha \in E$ de forma que $\gamma \in \mathbb{R}$ es una cota superior para E. Veamos que es la mínima cota superior: si $\delta \in \mathbb{R}$ es tal que $\alpha \leq \delta$ (es decir, $\alpha \subseteq \delta$), para todo $\alpha \in E$, entonces (por álgebra I)

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha \subseteq \delta \implies \gamma \leq \delta .$$

Así, $\gamma = \sup E$.

Paso 3. Definimos la suma en $\mathbb{R}$: dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ definimos

$$\alpha + \beta = \{p + q : \ p \in \alpha \ , \ q \in \beta\} .$$

Notemos que la definición anterior está basada en la suma en $\mathbb{Q}$. Veamos que valen las propiedades S1.-S5. de la Definición 1.6, para la suma así definida.

S1. Veamos que $\alpha + \beta$ es una cortadura: es claro que $\emptyset \neq \alpha + \beta \subseteq \mathbb{Q}$ (porque α y β son no vacíos). Sea r', $s' \in \mathbb{Q}$, $r' \notin \alpha$ y $s' \notin \beta$. Entonces si $r \in \alpha$ y $s \in \beta$ son arbitrarios (como vimos antes) $r < r'$ y $s < s'$: luego $r + s < r' + s'$. Lo anterior dice que $r' + s' \notin \alpha + \beta$ (según la definición de suma de arriba) y vale C1. Para ver C2. sea $p \in \alpha + \beta$ y sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$. Por definición, existen $r \in \alpha$, $s \in \beta$ tales que $q \leq p = r + s$. Como $q - p \leq 0$ entonces $r + (q - p) \leq r$, que muestra que $r + (q - p) \in \alpha$ y entonces

$r+(q-p)+s = p+(q-p) = q \in \alpha+\beta$. Finalmente, vemos C3: Sea $p \in \alpha+\beta$. Por definición, existen $r \in \alpha$, $s \in \beta$ tales que $p = r+s$. Por C3 para α y β, existen $r' \in \alpha$, $s' \in \beta$ tales que $r < r'$, $s < s'$ y entonces $p = r+s < r'+s' \in \alpha+\beta$ (por definición).

S2. Es una consecuencia de la asociatividad de la suma en $\mathbb{Q}$: si α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ entonces es sencillo verificar (ejercicio: se usa que $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$ y que $\beta+\gamma \in \mathbb{R}$, $\square$)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= \{(r+s)+t:\ r\in\alpha\,,\ s\in\beta\,,\ t\in\gamma\} = \{r+(s+t):\ r\in\alpha\,,\ s\in\beta\,,\ t\in\gamma\}\\ &= \alpha+(\beta+\gamma)\,.\end{aligned}$$

S3. es una consecuencia de la conmutatividad de la suma en $\mathbb{Q}$: en efecto,

$$\alpha+\beta = \{r+s:\ r\in\alpha\,,\ s\in\beta\} = \{s+r:\ r\in\alpha\,,\ s\in\beta\} = \beta+\alpha$$

S4. Veamos que $\alpha+0^* = \alpha$. En efecto, si $r \in \alpha$, $s \in 0^*$ entonces r, $s \in \mathbb{Q}$ y $s < 0$; entonces $r+s < r$ que muestra que $r+s \in \alpha$, por C2. Así, $\alpha+0^* \subseteq \alpha$. Por otro lado, dado $r \in \alpha$ sea $q \in \alpha$ tal que $r < q$ (acá usamos C3.) Entonces $s = r-q < 0$ y $r = q+(r-q) \in \alpha+0^*$, que muestra que $\alpha \subseteq \alpha+0^*$. Así, la doble inclusión muestra la igualdad de conjuntos $\alpha+0^* = \alpha$.

S5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo: definimos

$$\beta = \{p\in\mathbb{Q}:\ \exists\, r\in\mathbb{Q}\,,\ r>0\ ,\ -p-r = -(p+r)\notin\alpha\}\,.$$

Veamos que $\beta \in \mathbb{R}$ (es una cortadura) y $\alpha+\beta = 0^*$. Sea $s \notin \alpha$ (por C1. para α) y sea $p = -s-1$: entonces $-p-1 = s \notin \alpha$. Así, $p \in \beta$ y $\beta \neq \emptyset$. Si $q \in \alpha$, notemos que $-q \notin \beta$: en efecto, si $r > 0$ entonces $-(-q)-r = q-r < q \in \alpha$, de forma que $-(-q)-r \in \alpha$, para $r > 0$. Lo anterior muestra que $\beta \neq \mathbb{Q}$ y vale C1. para β. Sea $p \in \beta$, sea $q \in \mathbb{Q}$, $q \le p$ y sea $r > 0$ tal que $-p-r \notin \alpha$; como $-p \le -q$ entonces $-p-r \le -q-r$ que muestra que $-q-r \notin \alpha$ (de otra forma, $-q-r \in \alpha$, $-p-r \le -q-r$ implican $-p-r \in \alpha$ en contra de la hipótesis). Así, vale C2. para β. Finalmente, si $p \in \beta$, sea $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ tal que $-p-r \notin \alpha$. Entonces $\mathbb{Q} \ni p+r/2 > p$ es tal que existe $r/2 > 0$ y $-(p+r/2)-r/2 = -p-r \notin \alpha$; lo anterior muestra que $p+r/2 \in \beta$ y vale C3 para β: así, $\beta \in \mathbb{R}$.

Sean $r \in \alpha$, $s \in \beta$ arbitrarios; entonces existe $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$, tal que $-s-t \notin \alpha$. Como $-s-t < -s$ entonces $-s \notin \alpha$ de forma que $r < -s$ (de otra forma, $-s \le r$ que fuerza a que $-s \in \alpha$ por C2.). Así, $r+s < 0$ y vale que $\alpha+\beta \subseteq 0^*$. Por otro lado, sea $v \in 0^*$: entonces $w = -v/2 > 0$, $w \in \mathbb{Q}$. Usando C1. para α, existen $t \in \alpha$ y $u \in \mathbb{Q}$, $u \notin \alpha$: entonces $t < u$ y existen k_0, $k_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $k_0 \cdot w < t < u < k_1 \cdot w$. Sea

$$n = \max\{k\in\mathbb{Z}:\ k_0 \le k \le k_1\,,\ k\cdot w\in\alpha\}$$

notemos que $k_0 \cdot w \in \alpha$ y $k_1 \cdot w \notin \alpha$ de forma que $k_0 \le n < k_1$, $n \cdot w \in \alpha$ y $(n+1)\cdot w \notin \alpha$. Sea $p = -(n+2)\cdot w$: como $-p-w = (n+1)\cdot w \notin \alpha$, vemos que $p \in \beta$; además, $v = n\cdot w + p \in \alpha+\beta$. Como $v \in 0^*$ era arbitrario, vemos que $0^* \subseteq \alpha+\beta$. Así, vale la doble inclusión $\alpha+\beta = 0^*$. En adelante notamos $\beta = -\alpha$.

Paso 4. Veamos que el orden total en $\mathbb{R}$ verifica la propiedad O1. de la Proposición 1.14. En efecto, si α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\beta < \gamma$ i.e. $\beta \subset \gamma$ y $\beta \neq \gamma$ (que también notamos como $\beta \subsetneq \gamma$) entonces

$$\alpha+\beta = \{r+s:\ r\in\alpha\,,\ s\in\beta\} \subseteq \{r+s:\ r\in\alpha\,,\ s\in\gamma\} = \alpha+\gamma\,.$$

Si suponemos que $\alpha+\beta = \alpha+\gamma$, entonces usando (los hechos ya probados) que existe $-\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + -\alpha = 0^*$, que la suma es asociativa y que 0^* es el neutro para la suma, podemos concluir concluir que $\beta = \gamma$, en contra de nuestra hipótesis. Así, $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Por otro lado, si $\alpha > 0^*$ entonces $-\alpha < 0$: en efecto, notemos que por hipótesis, $0^* \subsetneq \alpha$; si $r \in -\alpha$ entonces existe $s > 0$ tal que $-r - s \notin \alpha$; en particular, $0 \leq -r - s$ y $r < r + s \leq 0$ que muestra que $-\alpha \leq 0$. Por otro lado, si $-\alpha = 0$ entonces usando las propiedades S1.-S5. ya probadas, deducimos que $\alpha = 0$, en contra de la hipótesis. Así, $-\alpha < 0$. De forma análoga se verifica la recíproca: $-\alpha < 0$ implica $\alpha > 0$ (ejercicio).

Paso 5. Comenzamos definiendo el producto en $\mathbb{R}$ para el caso de α, $\beta > 0^*$. En este caso, existen $r \in \alpha$, $r > 0$ y $s \in \beta$, $s > 0$ (en efecto, existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin 0^*$ implica que $p \geq 0$. Luego, por C3. para α, existe $r \in \alpha$, $r > p \geq 0$; y lo mismo para probar que existe s). Definimos

$$\alpha \cdot \beta = \{p \in \mathbb{Q} :\ \exists r \in \alpha\,,\ r > 0\,, \exists s \in \beta\,,\ s > 0\,,\ p \leq r \cdot s\}\,.$$

En este caso se verifica que $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$ es decir, es una cortadura (Ejercicio! $\Box$). Notar que por construcción $\alpha \cdot \beta > 0^*$. Además, si $\alpha \geq 0^*$ y $\beta \geq 0^*$ y alguno es 0^*, definimos $\alpha \cdot \beta = 0^*$.

Con estas definiciones se verifican las propiedades en M1.-M5. y D cuando α, $\beta \geq 0^*$ (aquí consideramos 1^* como la unidad). Ejercicio (un gran $\Box$). Finalmente completamos la definición del producto en $\mathbb{R}$ según los siguientes casos:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} -\alpha \cdot -\beta & \alpha \leq 0^*,\ \beta \leq 0^*; \\ -(-\alpha \cdot \beta) & \alpha \leq 0^*,\ \beta \geq 0^*; \\ -(\alpha \cdot -\beta) & \alpha \geq 0^*,\ \beta \leq 0^*. \end{cases}$$

Notemos que los productos a la derecha tienen factores mayores ó iguales que cero (para los cuales el producto ya ha sido definido). Usando que valen las propiedades M1.-M5. cuando los factores α, $\beta \geq 0^*$ (ejercicio previo) se puede verificar que las propiedades M1.-M5. valen en general (para factores α, $\beta \in \mathbb{R}$): el lector intuitivo adivinará: ejercicio! ($\Box$). Por ejemplo, para verificar la distributividad

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

hay que considerar varios casos, según los signos de los factores reales involucrados. Por ejemplo, si $\alpha \geq 0^*$, $\beta \leq 0^*$ y $\gamma \geq 0^*$ pueden pasar dos sub-casos: $\beta + \gamma > 0^*$ ó $\beta + \gamma \leq 0^*$. Si suponemos además que $\beta + \gamma > 0^*$ entonces, como $-\beta \geq 0^*$

$$\gamma = (\beta + \gamma) + -\beta \implies \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot -\beta$$

donde hemos usado la distributividad cuando todos los factores son mayores ó iguales que cero (que asumimos que ya hemos probado! en ejercicio anterior). Además, recordemos que por definición

$$\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot -\beta) \implies \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot -\beta + -(\alpha \cdot -\beta) = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

donde hemos cancelado dos términos (usando la propiedad S5. de la Definición 1.6 que ya hemos probado). Dejamos los detalles de considerar los casos restantes y sus verificaciones al lector comprometido. Además, el orden y el producto (ya completamente definidos) satisfacen la propiedad O2. de la Proposición 1.14 (ejercicio!).

Paso 6. Los pasos anteriores muestran que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo dotado de un orden compatible (inducido por un cono estrictamente positivo). Así, $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado. Además, como conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ tiene la propiedad de la mínima cota superior. Nos resta ver que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo ordenado. Definimos $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(r) = r^* \in \mathbb{R}$. Veamos que Φ respeta la estructura de $\mathbb{Q}$ y el cono estrictamente positivo de $\mathbb{Q}$. Notemos que hemos probado que $0^* = \Phi(0)$ y $1^* = \Phi(1)$ son el neutro y la unidad en el cuerpo $\mathbb{R}$. Veamos que

$$\Phi(r + s) = \Phi(r) + \Phi(s)$$

es decir, $(r + s)^* = r^* + s^*$. En efecto, si $p \in r^* + s^*$ entonces existen $u, v \in \mathbb{Q}$, $u < r$, $v < s$ tales que $p = u + v < r + s$, de forma que $p \in (r + s)^*$. Por otro lado, si $p < r + s$ sea $t \in \mathbb{Q}$ tal que $2t = (r + s) - p > 0$. Sea $r' = r - t \in r^*$, $s' = s - t \in s^*$ y notemos que $p = (r + s) - 2t = r' + s' \in r^* + s^*$. Los hechos anteriores muestran (a través de la doble inclusión de conjuntos) que $r^* + s^* = (r + s)^* \in \mathbb{R}$.

De forma similar se prueba que $\Phi(r \cdot s) = \Phi(r) \cdot \Phi(s)$, es decir $(r \cdot s)^* = r^* \cdot s^*$, ejercicio ($\square$).

Finalmente, si $r \in \mathbb{Q}$ es tal que $r > 0$ entonces $r^* > 0^*$: en efecto, notemos que si $p \in 0^*$ entonces $p < 0 < r$ de forma que $p \in r^*$ y $0^* \leq r^*$. Por otro lado, $0 < r/2 \in r^*$, mientras que $r/2 \notin 0^*$, que muestra que $r^* \neq 0^*$. De forma análoga se prueba que si $r^* > 0^*$ (en $\mathbb{R}$) entonces $r > 0$ (en $\mathbb{Q}$). Así, podemos identificar $\mathbb{Q}$ con $\Phi(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ y pensar, como hacemos de aquí en adelante, que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. ■

Ahora que hemos construido $\mathbb{R}$ vamos a verificar algunas de sus otras propiedades fundamentales.

Teorema 1.16. *Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo ordenado que hemos construido. Entonces*

1. *$\mathbb{R}$ es arquimediano: si $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot x > y$.*
2. *$\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.*

Demostración. Para ver 1. sea

$$A = \{n \cdot x : \ n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R} \ , \ A \neq \emptyset \, ,$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si suponemos que $\nexists n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot x > y$ entonces, $n \cdot x \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Es decir, $y \in \mathbb{R}$ es una cota superior para A en $\mathbb{R}$ y luego existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Como $x > 0$ entonces $\alpha - x < \alpha$, de forma que $\alpha - x$ no es cota superior de A; como $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\alpha - x < n_0 \cdot x$ y luego $\alpha < (n_0 + 1) \cdot x$ con $n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$. Lo anterior contradice que $\alpha = \sup A$ (porque α no sería cota superior de A). Así, debe existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $y < n \cdot x$.

Para ver 2., notemos que $y - x > 0$; por 1. debe existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot (y - x) > 1$ de forma que $n \cdot y > n \cdot x + 1$. Aplicando 1. a los pares $n \cdot x, 1 \in \mathbb{R}$ y $-n \cdot x, 1 \in \mathbb{R}$, con $1 > 0$, vemos que existen m_1, $m_2 \in \mathbb{N}^*$ tales que $m_1 \cdot 1 = m_1 > n \cdot x$ y $m_2 > -n \cdot x$. Entonces $-m_2 < n \cdot x < m_1$. Sea

$$m = \min\{k \in \mathbb{Z} : \ -m_2 \leq k \leq m_1 \ , \ n \cdot x < k\} \, .$$

Entonces $-m_2 < m \leq m_1$ y $m - 1 \leq n \cdot x < m$ que muestra que

$$n \cdot x < m \leq n \cdot x + 1 < n \cdot y \implies x < \frac{m}{n} < y \, .$$

■

1.4 La recta real extendida

El conjunto de los reales extendidos, notado $\overline{\mathbb{R}}$, está dado por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donde $\pm\infty$ denotan dos elementos (nuevos) que no están en $\mathbb{R}$. En $\overline{\mathbb{R}}$ consideramos el orden: dados $x,\, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \leq y$ si y solo si: $x,\, y \in \mathbb{R}$ y $x \leq y$ en el sentido usual ó $x = -\infty$ ó $y = \infty$. En particular, si $x \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ entonces $-\infty < x < +\infty$. Además, definimos: si $x \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$:

$$x - (-\infty) = +\infty \,,\; x + (-\infty) = -\infty \,,\; x - (+\infty) = -\infty \,,\; x + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty \,,\; +\infty + (+\infty) = +\infty \,,\; \frac{x}{\pm\infty} = 0 \,.$$

Notemos que expresiones del tipo $+\infty - (+\infty)$ ó $+\infty + (-\infty)$ no fueron definidas. De forma similar,

$$\text{si } \; x > 0 \; : \; x \cdot +\infty = +\infty \,,\; x \cdot -\infty = -\infty$$

mientras que si $x < 0$ entonces $x \cdot +\infty = -\infty$, $x \cdot -\infty = +\infty$. Notemos que expresiones del tipo $0 \cdot \pm\infty$ no han sido definidas. Así, la suma y el producto en $\overline{\mathbb{R}}$ están *parcialmente* definidas.

Obs 1.17. Sea $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$. Entonces existe $\sup E \in \overline{\mathbb{R}}$. En efecto, notemos que $+\infty \in CS(E)$, de forma que $CS(E) \neq \emptyset$. Consideramos los siguientes casos:

1. Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in CS(E)$ (E está acotado superiormente en $\mathbb{R}$) entonces vale alguno de los siguientes sub-casos:
   (a) Si $E' = E \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$ entonces $E' \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$: en este caso existe $\alpha = \sup E'$ y vale que $\alpha = \sup E$ ($\square$).
   (b) $E = \{-\infty\}$ y en este caso $\sup E = -\infty$.
2. Si E no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ (es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $e \in E$ tal que $x < e$) entonces $CS(E) = \{+\infty\}$ y $\sup E = +\infty$ en este caso.

1.5 Complejos

En esta sección describimos brevemente la construcción de $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$. Además, incluimos algunos aspectos geométricos (y métricos) de $\mathbb{C}$.

Formalmente, definimos $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como conjunto. En $\mathbb{C}$ podemos definir las operaciones

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C} \,.$$

Teorema 1.18. *Con las definiciones anteriores para la suma y la multiplicación $\mathbb{C}$ resulta un cuerpo con elemento neutro para la suma dado por $(0, 0)$ y elemento neutro para el producto dado por $(1, 0)$. Más aún, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por $\Phi(a) = (a, 0)$ es un morfismo de cuerpos que muestra que $\mathbb{C}$ incluye a $\mathbb{R}$ como cuerpo.*

Demostración. Un muuuy largo ejercicio que han resuelto en su mayoría en Álgebra I. $\square$

En general, identificamos $\mathbb{R}$ con $\Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$. De esta forma, si $z = (c, d) \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces notamos $a \cdot z = \Phi(a) \cdot z = (ac, ad) \in \mathbb{C}$ y $a + z = \Phi(a) + z = (a + c, d) \in \mathbb{C}$.

También es usual notar $i = (0,1) \in \mathbb{C}$. Notemos que por las definiciones que hemos mencionado
$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1\,.$$
Además, $z = (a,b) = a + b \cdot i$ para todo $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. En este caso, notamos $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$ y $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$ que son las partes reales e imaginarias de $z \in \mathbb{C}$.

Dado $z = a + b \cdot i$ definimos el conjugado de z, notado $\overline{z}$, dado por $\overline{z} = a - b \cdot i = (a, -b) \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.19. *Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{w} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$, $z - \overline{z} = 2\,i\,\Im(z)$.

□

Notemos que se verifica
$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0\,.$$
Definimos el módulo de z, notado $|z|$, como la raíz cuadrada no negativa $|z| = (z \cdot \overline{z})^{1/2} \geq 0$. Para finalizar incluimos una serie de propiedades de $\mathbb{C}$ en el siguiente resultado (cuya prueba es otro ejercicio).

Teorema 1.20. *Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ *si y solo si* $z = 0$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
4. $|\Re(z)| \leq |z|$.
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

□

Notemos que si $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ entonces podemos considerar $|a|$ en el sentido usual en $\mathbb{R}$ ó bien podemos considerar $|a|$ en el sentido del módulo de un número complejo. Pero es sencillo verificar que estas dos expresiones coinciden.

Notemos que no es posible definir un órden en $\mathbb{C}$ que lo convierta en un cuerpo ordenado (verificar). Así, siempre que escribamos un signo de desigualdad estará implícito (ó deberemos verificar) que los números involucrados son reales.

1.6 Conjuntos numerables

En esta última sección del capítulo mencionamos algunos hechos relacionados con los conjuntos numerables. Para hacer esto, primero recordamos brevemente (e informalmente) el concepto de función entre conjuntos.

Dados dos conjuntos A, B, una función $f : A \to B$ es una asignación que a cada elemento $a \in A$ le asigna un único elemento $f(a) \in B$.

1. En este caso, A es denominado el dominio de f y B es denominado el co-dominio de f.
2. Si $E \subset A$ consideramos $f(E) = \{f(e) : \ e \in E\} \subset B$, la imagen directa de E por f.
3. Si $F \subset B$ consideramos $f^{-1}(F) = \{a \in A : \ f(a) \in F\} \subset A$, la preimagen de F por f.
4. Recordemos que f es *suryectiva* si $f(A) = B$ y que f es *inyectiva* si siempre que a, $a' \in A$ son tales que $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$.
5. Finalmente, f es biyectiva si es inyectiva y suryectiva a la vez. En ese caso, queda definida la función inversa de f, notada $f^{-1} : B \to A$ tal que las composiciones
$$f \circ f^{-1} = I_B \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = I_A \,,$$
donde $I_A : A \to A$ y $I_B : B \to B$ denotan las funciones identidad de A y B respectivamente.

Definición 1.21. Decimos que los conjuntos A y B son coordinables (ó que tienen el mismo cardinal), y notamos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$.

La definición de que dos conjuntos sean coordinables modela la idea de que los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Sin embargo, esta idea es más sutil de lo que parece a primera vista.

Obs 1.22. Sea U un conjunto y consideremos $P(U) = \{A : \ A \subseteq U\}$ el conjunto de partes de U. Entonces la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $P(U)$. Notemos que si $A \in P(U)$ entonces $I_A : A \to A$ es biyección ($\sim$ es reflexiva). Si $A \sim B$ existe $f : A \to B$ biyección; pero $f^{-1} : B \to A$ también es biyección, ejercicio de Algebra I ($\sim$ es simétrica) y la transitividad de $\sim$ es consecuencia de que la composición de biyecciones es biyección ($\Box$). $\triangle$

En lo que sigue notamos $\mathbb{I}_n = \{1, \ldots, n\}$ al conjunto de los números naturales entre 1 y n, para $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definición 1.23. Sea A un conjunto. Decimos que

1. A es finito si $A = \emptyset$ ó existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.
2. A es infinito si A no es finito.
3. A es numerable si $A \sim \mathbb{N}^*$.
4. A es a lo sumo numerable si A es finito ó A es numerable.
5. A es no numerable si A no es a lo sumo numerable.

△

Si $A \neq \emptyset$ es finito, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$ (ejercicio difícil!) y en este caso decimos que A *tiene* n *elementos*, y escribimos $\#(A) = n$ ó $|A| = n$. De forma similar, se puede probar que si A y B son conjuntos finitos y no vacíos entonces $A \sim B$ si y solo si A y B tienen la misma cantidad de elementos (ejercicio).

Sin embargo, en el caso de conjuntos infinitos, se verifican ciertos hechos que pueden contradecir la noción intuitiva de *cantidad elementos*.

Ejemplos 1.24. Consideremos los siguientes hechos:

1. Sea $k \in \mathbb{N}^*$ y consideramos $A_k = \{n \in \mathbb{N}^* : \ n \geq k\} \subset \mathbb{N}^*$. En general, si $k > 1$ entonces $A_k \subset \mathbb{N}^*$ es un subconjunto propio (es decir, $A_k \neq \mathbb{N}^*$). Sin embargo, $A_k \sim \mathbb{N}^*$: de hecho la función $f_k : \mathbb{N}^* \to A_k$ dada por $f_k(m) = m+(k-1)$, $m \in \mathbb{N}^*$, es una biyección.

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ es un subconjunto propio, y de hecho $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ es infinito: sin embargo, también $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Para verificar esto, consideramos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ es par ;} \\ -(n+1)/2 & n \text{ es impar .} \end{cases}$$

En este caso se puede verificar que f es una biyección (ejercicio).

3. Notemos que no todo conjunto infinito es numerable: consideramos

$$A = \{f : \mathbb{N}^* \to \{0,1\} : \ f \text{ es función } \}\,.$$

A es un conjunto infinito; más aún, no hay ninguna suryección $h : \mathbb{N}^* \to A$. En efecto, sea $h : \mathbb{N}^* \to A$ una función arbitraria. Vamos a construir un elemento de A que no está en $h(\mathbb{N}^*)$: para ello notamos $h(n) = f_n \in A$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Así, $f_n : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ es una función. Definimos la función $f : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ como sigue: dado $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{si } f_n(n) = 1. \end{cases}$$

La asignación anterior determina a la función $f \in A$; además, si $n \in \mathbb{N}^*$ entonces $f \neq f_n = h(n)$: en efecto, $f(n) \neq f_n(n)$ por construcción ! (como los valores de las funciones difieren en al menos un punto de su dominio, las funciones no pueden ser iguales). Así, $f \notin h(\mathbb{N}^*)$ y h no es suryectiva.

Lo anterior muestra que A es no numerable (el razonamiento anterior es conocido como el *argumento diagonal de Cantor*). △

El siguiente resultado indica que los conjuntos numerables son los conjuntos infinitos más chicos que podemos considerar.

Proposición 1.25. *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe $B \subseteq A$ tal que B es numerable.*

Demostración. Por hipótesis, $A \neq \emptyset$ (de otra forma, sería finito) y existe $b_1 \in A$. Consideremos $A \setminus \{b_1\}$: este conjunto no es vacío (de otra forma, $A = \{b_1\} \sim \mathbb{I}_1$ es finito) y podemos considerar $b_2 \in A \setminus \{b_1\}$; en particular, $b_2 \neq b_1$. Ahora notamos que $A \setminus \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$ y podemos elegir b_3 y continuar. Notemos que una vez elegidos $b_1, \ldots, b_n$ entonces $A \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} \neq \emptyset$ y podemos elegir b_{n+1} de forma que $b_{n+1} \neq b_j$, para $1 \leq j \leq n$. Este proceso se puede continuar: de esta forma, podemos definir $f : \mathbb{N}^* \to A$ dada por $f(n) = b_n \in A$, para $n \in \mathbb{N}^*$ (la formalización de este procedimiento requiere considerar el principio de recursión en $\mathbb{N}^*$, que es formalmente similar al principio de inducción, que no consideramos aquí). Notemos que por construcción $f(n+1) = b_{n+1} \neq f(j)$, para todo $1 \leq j \leq n$, que muestra que f es una inyección. Finalmente, definimos $B = f(\mathbb{N}^*) \subset A$: entonces $\mathbb{N}^* \sim B$ (usando que $\tilde{f} : \mathbb{N}^* \to B$ tal que $\tilde{f}(n) = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ es una biyección), que muestra que B es un subconjunto numerable de A. ■

Proposición 1.26. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N}^* \to A$ una biyección (que existe, porque A es numerable). Sea $B \subset A$. Si B es finito, entonces B es a lo sumo numerable y listo. Si B es infinito, sea

$$M = \{n \in \mathbb{N}^* : \ f(n) \in B\} = f^{-1}(B) \subset \mathbb{N}^* .$$

Notemos que $M \neq \emptyset$ es tal que $\tilde{f} : M \to B$ dada por $\tilde{f}(m) = f(m)$, $m \in M$, es una biyección; en particular, $M \sim B$ que muestra que M es infinito. Sea $1 \leq n_1 \in M$ el primer elemento de M (aquí usamos las propiedades de $\mathbb{N}$). Como $M \setminus \{n_1\} \neq \emptyset$ consideramos n_2 el primer elemento de $M \setminus \{n_1\}$; notemos que $n_2 > n_1 \geq 1$ y en particular $n_2 \geq 2$; continuando con este proceso podemos definir $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ tal que $n_m \geq m$: en este caso $M \setminus \{n_1, \ldots, n_m\} \neq \emptyset$ (de otra forma M sería finito) y podemos considerar n_{m+1} el primer elemento de $M \setminus \{n_1, \ldots, n_m\} \subseteq \mathbb{N}^*$ y luego $n_{m+1} > n_m \geq m$ de forma que $n_{m+1} \geq m + 1$.

Sea $h : \mathbb{N}^* \to B$ dada por $h(m) = f(n_m) \in B$, para $m \geq 1$. Notemos que h es una función inyectiva: si $m \neq m'$ entonces $n_m \neq n_{m'}$ y luego, como f es inyectiva, $f(n_m) \neq f(n_{m'})$. Además, h es suryectiva: si $b \in B$ entonces existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(m) = b$ (porque f es suryectiva) y entonces se debe verificar que $b = h(k)$ para algún $1 \leq k \leq m$ (ejercicio □). En particular, $B \sim \mathbb{N}^*$ y B es numerable. ■

Recordemos que dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ podemos construir el producto cartesiano

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_j \in A_j \ , \ 1 \leq j \leq n\} .$$

Proposición 1.27. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces el producto cartesiano $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ es numerable.*

Demostración. Notemos que A es conjunto infinito (es sencillo coordinar un subconjunto de A con $\mathbb{N}^*$). Para ver que A es numerable usamos el resultado anterior: en este caso, basta mostrar que A es (coordinable con) un subconjunto de un conjunto numerable. Notemos primero que A es coordinable con $(\mathbb{N}^*)^n = \mathbb{N}^* \times \ldots \times \mathbb{N}^*$ (n factores). En efecto, por hipótesis existen biyecciones $f_j : A_j \to \mathbb{N}^*$, para $1 \leq j \leq n$: en este caso podemos definir $f : A \to (\mathbb{N}^*)^n$ dada por $f(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1), \ \ldots, \ f_n(a_n)) \in (\mathbb{N}^*)^n$, para $(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Es sencillo verificar que f es biyección (ejercicio), y entonces $A \sim (\mathbb{N}^*)^n$. Ahora veamos que $(\mathbb{N}^*)^n$ es coordinable con un subconjunto de $\mathbb{N}$. Para eso, sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}^*$ números primos distintos dos a dos ($p_i \neq p_j$ si $i \neq j$) y definamos la función $h : (\mathbb{N}^*)^n \to \mathbb{N}^*$ dada por $h(r_1, \ldots, r_n) = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n} \in \mathbb{N}^*$, para $(r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Por el teorema fundamental de la Aritmética concluimos que h es inyectiva! (ejercicio). Luego, si $B = h((\mathbb{N}^*)^n) \subset \mathbb{N}^*$ vemos que $h : (\mathbb{N}^*)^n \to B$ es una biyección. En resumen, $A \sim (\mathbb{N}^*)^n \sim B$. Como B es un subconjunto infinito de un conjunto numerable, el resultado anterior muestra que $B \sim \mathbb{N}^*$. Como $\sim$ es una relación transitiva, $A \sim \mathbb{N}^*$ ■

Corolario 1.28. $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

Demostración. Consideramos $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$: entonces, simplificando factores primos comunes, podemos escribir $q = \frac{a}{b}$ tales que a, $b \in \mathbb{N}^*$ son co-primos, es decir $(a, b) = 1$: en este caso, la escritura (que se llama fracción reducida) es única (ejercicio). De forma análoga, si $q < 0$ entonces podemos escribir $q = \frac{a}{b}$ tales que $-a$, $b \in \mathbb{N}^*$ y $(a, b) = 1$ y la escritura también es única. Ahora podemos definir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f(q) = (a, b)$ tal que $q = \frac{a}{b}$ es fracción reducida, si $q \neq 0$ y $f(0) = (0, 0)$. Entonces f es una función inyectiva: como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}^*$ (por el resultado anterior), concluimos que $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q})$ y que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es un conjunto numerable. Así, $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q}) \sim \mathbb{N}^*$ (los detalles quedan como ejercicio, □).

Proposición 1.29. *Supongamos que para cada $j \in \mathbb{N}^*$ tenemos un conjunto numerable E_j y definamos*

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} E_j = \{x : \ \exists j \in \mathbb{N}^* \ , \ x \in E_j\} .$$

Entonces E es numerable.

Demostración. Es sencillo verificar que E es conjunto infinito. Por hipótesis, para $j \in \mathbb{N}^*$ existe una biyección $f_j : E_j \to \mathbb{N}^*$. Dado $e \in E$ consideramos $M_e = \{j \in \mathbb{N}^* : \ e \in E_j\} \neq \emptyset$ y definimos $n_0(e) \in \mathbb{N}^*$ como el primer elemento de M_e. En este caso, asignamos el valor $f(e) = (n_0(e), f_{n_0(e)}(e)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Lo anterior determina una función $f : E \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ que resulta inyectiva: si $e \neq e'$ entonces: si $n_0(e) \neq n_0(e')$ vale que $f(e) \neq f(e')$ (difieren en la primer coordenada) y si $n_0(e) = n_0(e')$ entonces $f_{n_0(e)}(e) \neq f_{n_0(e')}(e')$ porque $f_{n_0(e')}$ es inyectiva, y $f(e) \neq f(e')$ (difieren en la segunda coordenada). Así, $E \sim f(E) \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}^*$. Por la Proposición 1.25 tenemos que $\mathbb{N}^* \sim f(E) \sim E$ y E es numerable.

■

1.7 Ejercicios

Ejercicio 1.

a) Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y denotamos por s a una cota superior de S. Demostrar que $s = sup(S)$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in S$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

b) Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y denotamos por r a una cota inferior de S. Demostrar que $r = inf(S)$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $b \in S$ tal que $r \leq b < r + \varepsilon$.

Ejercicio 2. Hallar cotas superiores e inferiores, ínfimo, supremo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos de números reales:

a) $A = (-\infty, 1)$.

b) $B = \left\{2 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

c) $C = [-2, 1)$.

d) $D = \left\{ \dfrac{1}{x^2} : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$.

e) $E = \left\{ \dfrac{1}{1+x} : x \in \mathbb{R} - \{-1\} \right\}$.

f) $F = (-2, -1) \cup \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Ejercicio 3. Sea A un conjunto de números reales que no es vacío y que está acotado inferiormente. Definimos el conjunto

$$-A := \{-x : x \in A\}.$$

Demostrar que

$$inf(A) = -sup(-A).$$

Ejercicio 4. Para conjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}$, determinar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos. Demostrar los enunciados verdaderos y buscar contraejemplos para los falsos.

a) $sup(A \cap B) \leq inf\,\{sup(A), sup(B)\}$.

b) $sup(A \cap B) = inf\,\{sup(A), sup(B)\}$.

c) $sup(A \cup B) \geq sup\,\{sup(A), sup(B)\}$.

d) $sup(A \cup B) = \sup\,\{sup(A), sup(B)\}$.

Ejercicio 5. Demostrar que son equivalentes:

1. El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ es no acotado.
2. Para todo $z \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < n$.
3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.
4. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < x$.

Ejercicio 6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos acotados. Se sabe que para todo $a \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $|b - a| < \varepsilon$. Probar que $inf(A) \leq sup(B)$. Dar un ejemplo donde valga la igualdad y otro donde no.

Ejercicio 7. Sean $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) + g(x)$. Probar que

$$\sup_{x \in [0,1]} h(x) \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) + \sup_{x \in [0,1]} g(x).$$

Dar un ejemplo donde valga la igualdad y otro donde no.

Ejercicio 8. Demostrar que si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas entonces

$$\left| \sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x) \right| \leq \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| \, .$$

Ejercicio 9.

a) Demostrar usando la propiedad Arquimediana que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\left| \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 2n} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon.$$

b) Sea

$$A = \left\{ \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 2n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Calcular justificando el ínfimo y el supremo de A.

Ejercicio 10.

a) Demostrar usando la propiedad Arquimediana que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\left| \frac{n^2 + 4}{8n^2 + n} - \frac{1}{8} \right| < \varepsilon.$$

b) Sea

$$A = \left\{ \frac{n^2 + 4}{8n^2 + n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Calcular justificando el ínfimo y el supremo de A.

2 Espacios métricos

Comenzamos recordando una estructura que ha jugado un papel fundamental al momento de definir la noción de convergencia y continuidad en Análisis I y II. Esta estructura tiene que ver con la noción de distancia euclídea entre puntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Luego, vamos a aislar las propiedades fundamentales de esta noción de distancia y proponer una noción de distancia mucho más general.

2.1 Definiciones y propiedades básicas

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, consideramos

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_j \in \mathbb{R} \ , \ 1 \leq j \leq n\}$$

con su estructura usual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En $\mathbb{R}^n$ podemos considerar el producto interno usual: si $a = (a_j)_{j=1}^n$, $b = (b_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\langle a \, , \, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \, b_j \in \mathbb{R} \, .$$

En este caso, para $a = (a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ definimos la norma de a,

$$\|a\| = \langle a \, , \, a \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right)^{1/2} .$$

De esta forma, queda definida una función $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica: dados a, $b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

N1. $\|a\| = 0$ si y solo si $a = 0 \in \mathbb{R}^n$.

N2. $\|\lambda \, a\| = |\lambda| \, \|a\|$.

N3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

La expresión $\|a\|$ es llamada norma euclídea de a ó longitud usual de $a \in \mathbb{R}^n$.

En general, si una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisface $N1. - N3.$ decimos que N es una norma. En $\mathbb{R}^n$ se pueden considerar otras normas: por ejemplo, si $a = (a_j)_{j=1}^n$

$$\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_j| \quad \text{ y } \quad \|a\|_\infty = \max\{|a_j| : \ 1 \leq j \leq n\}$$

son otras dos normas en $\mathbb{R}^n$ (ejercicio). Es interesante notar que ni $\| \cdot \|_1$ ni $\| \cdot \|_\infty$ provienen de un producto interno en $\mathbb{R}^n$ (porque no satisfacen la identidad del paralelogramo $\square$).

En el caso de los cursos de Análisis I y II, en general se considera la distancia entre dos puntos a, $b \in \mathbb{R}^n$ como la norma euclídea del vector diferencia, es decir $\|b - a\| \geq 0$. En términos de esta noción de distancia se desarrollan las nociones de convergencia, límite y continuidad.

Una pregunta natural sería: cuales son las propiedades fundamentales de la distancia euclídea que permiten desarrollar nociones de convergencia, límite y continuidad. Por propiedades fundamentales, nos referimos a aquellas propiedades que juegan un papel importante en las pruebas de las propiedades de las nociones de convergencia, límite y continuidad.

Puede resultar sorprendente que en realidad, son unas pocas propiedades las que se usan sistemáticamente: estas propiedades son la simetría de la distancia $\|a-b\| = \|b-a\|$, la desigualdad triangular $\|a-b\| \le \|a-c\|+\|c-b\|$ y la no-degeneración, es decir, si $\|a-b\| = 0$ entonces $a = b$. En lo que sigue vamos a aislar estas tres propiedades y definir el concepto de métrica (ó función distancia) en un conjunto arbitrario.

Definición 2.1. Sea X un conjunto. Una métrica (ó distancia) en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ que verifica: para todos x, y, $z \in X$

D1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

D2. $d(x, y) = d(y, x)$.

D3. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

En este caso decimos que el par (X, d) es un espacio métrico (EM). △

Obs 2.2. Sea (X, d) EM y sea $E \subseteq X$. Entonces podemos restringir la métrica en X a una métrica en E es decir, considerar $d_E : E \times E \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ tal que $d_E(x, y) = d(x, y)$, para $x, y \in E$. En este caso, d_E es una métrica en E obtenida por restricción de d (ejercicio!) y decimos que (E, d_E) es un *subespacio métrico* (Ojo: esto es un nombre ó convención). △

Ejemplo 2.3. Consideremos el cuerpo de números complejos $\mathbb{C}$. En este caso podemos definir la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ (módulo de la diferencia de complejos). Las propiedades del módulo en $\mathbb{C}$ vistas en el capítulo anterior muestran que d es una distancia en $\mathbb{C}$ (que es llamada distancia usual en $\mathbb{C}$) □.

Más aún, dados a, $b \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, la distancia entre a y b en el espacio métrico $\mathbb{R}$ con su métrica usual coincide con la distancia entre a y b en el espacio métrico $\mathbb{C}$ con su métrica usual (que en ambos casos es $|b - a|$). De esta forma, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ es un subespacio métrico. △

Ejemplo 2.4. Es un hecho interesante que si partimos de cualquier norma $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, y consideramos $d_N : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ dada por $d_N(a, b) = N(a-b)$, entonces d_N es una función distancia. En efecto, es claro que $d_N(a, b) = N(a - b) = 0$ si y solo si $a - b = 0$ (por N1.) , es decir, si $a = b$. Además,

$$d_N(a, b) = N(a - b) = N(-(b - a)) = |-1|\, N(b - a) = N(b - a) = d_N(b, a)\,,$$

donde hemos usado N2. Finalmente, notemos que si $c \in \mathbb{R}^n$

$$d_N(a, b) = N(a - b) = N((a - c) + (c - b)) \le N(a - c) + N(c - b) = d_N(a, c) + d_N(c, b)$$

donde hemos usado N3. △

Ejemplo 2.5. Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un conjunto. Si $f : Y \to X$ es una función inyectiva entonces $d_f : Y \times Y \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ dada por

$$d_f(y, y') = d(f(y), f(y')) \quad \text{para} \quad y,\, y' \in Y$$

es una métrica □.

Como caso particular de lo anterior consideremos $(-\pi/2, \pi/2)$ con su estructura de espacio métrico usual (como subespacio de $\mathbb{R}$). Entonces podemos considerar la métrica en $\mathbb{R}$ inducida por la función $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$: es decir,

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad \text{para} \quad x,\, y \in \mathbb{R}\,.$$

Notemos que la métrica d verifica que $d(x, y) < \pi$, para todo x, $y \in \mathbb{R}$. △

Ejemplo 2.6. Sea $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ el intervalo cerrado y acotado. Consideramos

$$X = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\ ,\quad f \text{ es función continua }\}\,.$$

Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d(f, d) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

donde hemos considerado la integral de Riemann de la función continua $|f(x) - g(x)|$ en $[0, 1]$. Entonces d es una métrica (ejercicio: probar con detalle que d es no-degenerada). △

Ejemplo 2.7. Consideramos

$$\ell_\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} :\ \{|f(n)| :\ n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R} \text{ está acotado superiormente }\}\,.$$

Entonces $\ell_\infty(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con la suma y la acción escalar puntual: es decir, dados f, $g \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, si definimos

$$\lambda\, f + g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \quad \text{está dada por} \quad (\lambda\, f + g)(n) = \lambda\, f(n) + g(n) \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$

entonces $\lambda\, f + g \in \ell_\infty(\mathbb{R})$. Si $f \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ definimos

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| :\ n \in \mathbb{N}^*\} \geq 0$$

(que está bien definido en $\mathbb{R}$ porque asumimos que $f \in \ell_\infty(\mathbb{R})$). Entonces $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\ell_\infty(\mathbb{R})$ (todo lo anterior es ejercicio □). Finalmente, definimos $d : \ell_\infty(\mathbb{R}) \times \ell_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$, que es una métrica.

El espacio métrico $(\ell_\infty(\mathbb{R}), d_\infty)$ tiene muchas propiedades interesantes y bien distintas de las propiedades de $\mathbb{R}^n$ con su métrica usual. △

Como se ha visto en Análisis II, los subconjuntos *abiertos* y *cerrados* de $\mathbb{R}^n$ juegan un papel importante al momento de estudiar varias propiedades relacionadas con la convergencia, límite y continuidad. En lo que sigue, vamos a definimos nociones análogas pero en el contexto general de espacios métricos.

Definición 2.8. Sea (X, d) EM, sea $E \subset X$ y sea $p \in X$.

1. Dado $r > 0$ definimos
$$B_r(p) = \{y \in X :\ d(p, y) < r\}$$
llamada *bola abierta* de centro p y radio r.

2. Decimos que $p \in X$ es punto límite de E si para todo $r > 0$: $(B_r(p) \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset$.

3. Notamos E' al conjunto de todos los puntos límites de E.

4. Decimos que $p \in E$ es un punto interior a E si existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subseteq E$.

5. Notamos E^o al conjunto de todos los puntos interiores de E.

6. Dado $p \in E$ decimos que es aislado si $p \notin E'$.

7. Notamos $\mathrm{Ais}(E)$ al conjunto de todos los puntos aislados de E.

8. Decimos que E es *cerrado* si $E' \subseteq E$.

9. Decimos que E es *abierto* si $E = E^o$

10. Decimos que E es acotado si existe $r > 0$ y $q \in X$ tal que $E \subseteq B_r(q)$.

11. Decimos que E es denso si $X = E \cup E'$.

$\triangle$

Obs 2.9. Varios de los conceptos anteriores heredan sus nombres por la analogía formal que tienen con las construcciones realizadas en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea. Sin embargo, estas nociones difieren en algunos sentidos con ciertas características típicas de la métrica euclídea. Para ver esto, se sugiere dibujar las bolas $B_1(0)$ en $X = \mathbb{R}^2$ de centro $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ y de radio uno, con respecto a las métricas inducidas por $\|\cdot\|$ (norma euclídea), $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Por otro lado, los conjuntos subyacentes también pueden introducir modificaciones: por ejemplo, si consideramos $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y consideramos el subespacio métrico (E, d_E) donde d es la métrica euclídea, entonces en este subespacio métrico $B_1^{d_E}(0) = \{y \in E : \ d_E(0,y) < 1\} \subseteq E$ es la mitad superior de la bola $B_1^d(0)$ en el espacio métrico inicial $(\mathbb{R}^2, d)$. $\triangle$

En lo que sigue vamos a probar una serie de afirmaciones que muestran que las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados que estamos acostumbrados a usar siguen valiendo en el contexto más general de espacios métricos.

Proposición 2.10. *Sea (X,d) un EM. Si $r > 0$ y $p \in X$ entonces $B_r(p) \subset X$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $q \in B_r(p)$; entonces $d(p,q) < r$ de forma que $t = r - d(p,q) > 0$. Veamos que $B_t(q) \subseteq B_r(p)$: en efecto, si $w \in B_t(q)$ entonces $d(w,q) < t$; en este caso, por la desigualdad triangular de la métrica y la simetría

$$d(p,w) \leq d(p,q) + d(q,w) < d(p,q) + t = d(p,q) + (r - d(p,q)) = r$$

que muestra que $w \in B_r(p)$. Así, si $q \in B_r(p)$ entonces $q \in (B_r(p))^o$, por definición de interior. Entonces $B_r(p) \subseteq (B_r(p))^o$ y luego $B_r(p) = (B_r(p))^o$ (porque la inclusión $A^o \subseteq A$ vale siempre, para cualquier $A \subset X$). $\blacksquare$

Proposición 2.11. *Sea (X,d) un EM y $E \subset X$. Entonces el interior $E^o \subset E$ y es un conjunto abierto. Más aún, si $U \subset E$ es tal que U es abierto, entonces $U \subset E^o$.*

Demostración. Probamos primero la segunda parte: sea $U \subset E$ tal que U es abierto: si $x \in U$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U \subseteq E$; en resumen, $x \in E$ es tal que $B_r(x) \subseteq E$. Así, $x \in E^o$ por definición y vale $U \subseteq E^o$. Para la primer parte, notemos que la inclusión $E^o \subseteq E$ siempre se verifica; por otro lado, si $x \in E^o$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq E$. Por la proposición anterior ($B_r(x)$ es abierta) y la primer parte de la prueba, $B_r(x) \subseteq E^o$; de esta forma, E^o es abierto. ■

Con las notaciones del resultado anterior, podemos ver que E^o es el abierto más grande (con respecto al orden de la inclusión) contenido en E.

Proposición 2.12. *Sea (X, d) espacio métrico y sea $E \subset X$. Si $p \in E'$ entonces para todo $r > 0$ vale que $B_r(p) \cap E$ es un conjunto infinito.*

Demostración. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap E = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto finito. Consideremos

$$s = \min\{d(p, x_j) : \ 1 \leq j \leq n \ , \ x_j \neq p\} < r \, .$$

Entonces $s > 0$ (el mínimo está bien definido porque se trata de una cantidad finita de números). Notemos que si $x \in (B_s(p) \setminus \{p\}) \cap E$ entonces, como $B_s(p) \subseteq B_r(p)$, $x \in B_r(p) \cap E$ y $x \neq p$. Entonces $x = x_j$ para algún $1 \leq j \leq n$ y $x_j = x \neq p$ implica que $s \leq d(p, x_j) = d(p, x) < s$, que es una contradicción. ■

Corolario 2.13. *Sea (X, d) espacio métrico y sea $E \subset X$ un conjunto finito: entonces $E' = \emptyset$ (y en este caso $E =$Ais(E)).* □

Ejemplo 2.14. Sea $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea.

1. Si $E = \{(1/n, 0) : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ entonces $E^o = \emptyset$, $\text{Ais}(E) = E$ y $E' = \{(0, 0)\}$. E no es abierto ni cerrado; pero E es acotado.

2. Sea $E = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ d(p, (0, 0)) \leq 1\}$. Entonces $E^o = B_1((0, 0))$, $\text{Ais}(E) = \emptyset$, $E' = E$. E es cerrado, no es abierto, y es acotado.

Las afirmaciones anteriores son un ejercicio. △

Ejemplo 2.15. Sea $a < b < c < d \in \mathbb{R}$ y consideremos $X = (a, b) \cup (c, d)$. En este caso, $X \subset \mathbb{R}$ y consideramos el subespacio métrico (X, d_X) obtenido de restringir la métrica euclídea de $\mathbb{R}$ a X.

Sea $E = (a, b) \subseteq X$: entonces, dentro del espacio métrico (X, d_X) se tiene que $E = E^0 = E'$ y vale que E es abierto y cerrado. Además, E es acotado (de hecho todo el espacio métrico X es acotado). △

Ejemplo 2.16. Consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica euclídea. Sea $Y = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ (solo como conjunto) y sea $f : Y \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1)$. Entonces f es una función (bien definida e) inyectiva. Como hemos visto en el Ejemplo 2.5, la función $d_f : Y \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d_f(x, y) = d(f(x), f(y)) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \quad \text{con} \quad x, \, y \in (0, 1)$$

es una métrica en Y. Consideramos $E = (0, 1/2] \subseteq Y$: entonces, en el espacio métrico (Y, d_f) se tiene que $E' = E$, $E^o = (0, 1/2)$. De esta forma, E es cerrado, no es abierto y E no es acotado! △

Los ejemplos anteriores muestran que las propiedades de los conjuntos dependen fuertemente del espacio métrico que estemos considerando. En este sentido, siempre hay que tener bien claro el contexto (el EM: tanto la métrica como el conjunto subyacente!) en donde se están considerando las propiedades de los conjuntos.

Teorema 2.17. *Sea (X,d) un EM y sea $E \subseteq X$. Entonces E es abierto si y solo si $X \setminus E$ es cerrado.*

Demostración. Supongamos que E es abierto y sea $x \in (X \setminus E)'$: si suponemos que $x \notin X \setminus E$ entonces $x \in E$ y existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq E$. En este caso, $B_r(x) \cap (X \setminus E) \subseteq E \cap (X \setminus E) = \emptyset$. Este último hecho, junto con la la Proposición 2.12, contradicen la hipótesis de que $x \in (X \setminus E)'$. Así, $x \in X \setminus E$ y luego $(X \setminus E)' \subseteq X \setminus E$ con lo que $X \setminus E$ es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $X \setminus E$ es cerrado. Sea $x \in E$: entonces $x \notin (X \setminus E)'$ (de otra forma, $x \in (X \setminus E)' \subseteq X \setminus E$). En particular, existe $r > 0$ tal que $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap (X \setminus E) = \emptyset$ y luego $B_r(x) \setminus \{x\} \subseteq E$. Como $x \in E$, entonces $B_r(x) \subseteq E$ y $x \in E^o$. Así, $E \subseteq E^o$ y luego $E = E^o$ es abierto. ■

Corolario 2.18. *Sea (X,d) un EM y sea $F \subseteq X$. Entonces F es cerrado si y solo si $X \setminus F$ es abierto.* ■

Sea (X,d) un EM. En general, la clase de todos los subconjuntos abiertos en X juega un papel muy importante en los argumentos relacionados con convergencia, límites y continuidad. En el siguiente resultado vamos a estudiar algunas de las propiedades que tiene esta clase de subconjuntos.

Teorema 2.19. *Sea (X,d) un EM. Entonces se verifica que:*

1. *Si $U_\alpha \subset X$ es abierto para todo $\alpha \in A$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subset X$ es abierto.*
2. *Si $F_\alpha \subset X$ es cerrado para todo $\alpha \in A$, entonces $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset X$ es cerrado.*
3. *Si $U_j \subset X$ es abierto para $1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\bigcap_{j=1}^n U_j$ es abierto.*
4. *Si $F_j \subset X$ es cerrado para $1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\bigcup_{j=1}^n F_j$ es cerrado.*

Demostración. Para ver 1. sea

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{x \in X : \exists \alpha \in A \ , \ x \in U_\alpha\} \subset X \, .$$

Si $x \in U$ existe $\mu \in A$ tal que $x \in U_\mu$; como U_μ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U_\mu$. En este caso, $B_r(x) \subseteq U_\mu \subseteq U$, por definición de U. Así, $B_r(x) \subseteq U$ y $x \in U^o$. Lo anterior muestra que $U \subseteq U^o$ y luego que $U = U^o$ de forma que U es abierto.

Para verificar 2., notemos que si

$$F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \implies X \setminus F = \bigcup_{\alpha \in A} X \setminus F_\alpha \, ,$$

donde hemos usado una identidad de complementos de conjuntos (ley de De Morgan) de álgebra I. Como cada $X \setminus F_\alpha$ es un conjunto abierto (por el Teorema 2.17), la primer parte de la prueba muestra que $X \setminus F$ es abierto. Finalmente, el Corolario 2.18 muestra que F es cerrado.

Para verificar 3., sea $U = \bigcap_{j=1}^n U_j$. Si $x \in U$ entonces $x \in U_j$, para $1 \leq j \leq n$. En este caso, existen $r_j > 0$ de forma que $B_{r_j}(x) \subset U_j$, para $1 \leq j \leq n$ (porque cada U_j es abierto). Sea $r = \min\{r_j :\ 1 \leq j \leq n\} > 0$ (notar que el mínimo está bien definido y es positivo). En este caso, como $0 < r < r_j$ entonces $B_r(x) \subseteq B_{r_j}(x) \subseteq U_j$, $1 \leq j \leq n$. Lo anterior muestra que $B_r(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j = U$, de forma que $x \in U^o$. Así, $U \subseteq U^o$ y U es abierto.

La prueba del ítem 4. sigue una estrategia de reducción al ítem anterior, como en la prueba del ítem 2. Ejercicio $\square$. $\square$

Ejemplos 2.20. En los ítems 3 y 4 del teorema anterior, la hipótesis de que se consideran *finitos* conjuntos (abiertos ó cerrados) es esencial. En efecto, consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica usual y los siguientes casos:

1. Sea $U_n = (-1/n, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Esta sucesión de conjuntos abiertos verifica que
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$$
que no es abierto.

2. Sea $F_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Esta sucesión de conjuntos cerrados verifica que
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = (-1, 1)$$
que no es cerrado.

$\triangle$

Obs 2.21. Sea (X, d) un EM. Consideramos la *topología inducida por* d, notada τ_d, que es el conjunto
$$\tau_d = \{U \subset X :\ U \text{ es conjunto abierto } \}\,.$$
La topología τ_d verifica las siguientes propiedades:

T1. X, $\emptyset \in \tau_d$.

T2. Si $U_\alpha \in \tau_d$ para todo $\alpha \in A$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau_d$.

T3. Si $U_j \in \tau_d$ para todo $1 \leq j \leq n$, entonces $\bigcap_{j=1}^n U_j \in \tau_d$.

Observemos que las propiedades [T2] y [T3] son una consecuencia del Teorema 2.19. $\triangle$

Un mismo conjunto puede tener varias métricas definidas en él; de forma similar, un mismo conjunto puede tener varias topologías definidas en él (que pueden coincidir o no). En lo que sigue mencionamos brevemente algunas de las formas en las que es posible comparar métricas (y sus respectivas topologías).

Definición 2.22. Sea X un conjunto y sean d_1, $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dos métricas en X. Decimos que

1. las métricas son débilmente equivalentes si $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

2. las métricas son fuertemente equivalentes si existen constantes positivas α, $\beta > 0$ tales que
$$\alpha\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y) \quad \text{para todos} \quad x,\, y \in X\,.$$

$\triangle$

Obs 2.23. Sea X un conjunto. Entonces la relación de equivalencia débil (respectivamente fuerte) es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las métricas definidas en X (ejercicio $\square$).

Proposición 2.24. *Sea X un conjunto y sean d_1, $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dos métricas en X. Si d_1 y d_2 son fuertemente equivalentes, entonces son débilmente equivalentes (i.e. $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$).*

Demostración. Por hipótesis existen α, $\beta > 0$ tales que
$$\alpha\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y) \quad \text{para todos} \quad x,\, y \in X\,.$$
Veamos que en este caso $\tau_{d_2} \subset \tau_{d_1}$. En efecto, sea $U \in \tau_{d_2}$ y sea $x \in U$: por hipótesis, existe $r > 0$ tal que
$$B_r^{d_2}(x) = \{y \in X :\ d_2(x,y) < r\} \subseteq U\,.$$
Usando las desigualdades entre las métricas, notemos que si $d_1(x,y) < \frac{r}{\beta}$ entonces $d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y) < \beta \frac{r}{\beta} = r$. Entonces $B^{d_1}_{\frac{r}{\beta}}(x) \subseteq B_r^{d_2}(x) \subseteq U$, lo que muestra que para todo $x \in U$ existe $s > 0$ tal que $B_s^{d_1}(x) \subseteq U$. Así, U es abierto en el EM (X, d_1) y $U \in \tau_{d_1}$.

La prueba de la inclusión $\tau_{d_1} \subset \tau_{d_2}$ es análoga y se deja como ejercicio (notar, por ejemplo, que vale que $d_1(x,y) \leq \frac{1}{\alpha}\, d_2(x,y)$, para $x, y \in X$; en este caso podemos repetir el argumento anterior cambiando los roles de d_1 y d_2).

$\blacksquare$

Ejemplos 2.25. Consideremos:

1. En $\mathbb{R}^n$ las métricas inducidas por las normas euclídea, y las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son fuertemente equivalentes (entre sí).

2. Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = |1/x - 1/y|$ y $d_2(x,y) = |x-y|$ son débilmente equivalentes, pero no son fuertemente equivalentes.

3. Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = 1$ si $x \neq y$ y $d_1(x,y) = 0$ si $x = y$ (métrica discreta) y $d_2(x,y) = |x-y|$ no son débilmente equivalentes.

Las afirmaciones anteriores son ejercicios! $\triangle$

Definición 2.26. Sea (X,d) EM y $E \subseteq X$. Definimos

1. la clausura de E, notada $\overline{E}$, dada por $\overline{E} = E \cup E'$.

2. el borde E, notado ∂E, dado por $\partial E = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$.

$\triangle$

Proposición 2.27. *Sea (X,d) EM y sea $E \subseteq X$. Dado $x \in X$ entonces $x \in \overline{E}$ si y solo si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$.*

Demostración. Ejercicio □.

Teorema 2.28. *Sea (X, d) EM y sea $E \subseteq X$. Se verifica que*

1. *$\overline{E}$ es cerrado.*
2. *Si $E \subseteq F$ y F es cerrado entonces $\overline{E} \subseteq F$.*
3. *E es cerrado si y solo si $E = \overline{E}$.*

Demostración. Para ver 1. sea $x \in X \setminus \overline{E}$. Por la Proposición 2.27 existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap E = \emptyset$. Como $B_r(x)$ es conjunto abierto, dado $y \in B_r(x)$ existe $s > 0$ tal que $B_s(y) \subseteq B_r(x)$; en este caso, $B_s(y) \cap E \subseteq B_r(x) \cap E = \emptyset$, de forma que $y \in X \setminus \overline{E}$ (otra vez por la Proposición 2.27). En resumen, $B_r(x) \subseteq X \setminus \overline{E}$ y $X \setminus \overline{E}$ es abierto y luego $\overline{E}$ es cerrado.

Para ver 2. sea F cerrado tal que $E \subseteq F$. Si $x \in E'$ entonces para todo $r > 0$ vale que $\emptyset \neq (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \subseteq (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap F$, que muestra que $x \in F' \subseteq F$ (donde la última inclusión vale porque F es cerrado). Entonces $E' \subseteq F$ y $\overline{E} = E \cup E' \subseteq F$.

Para ver 3., notemos que si E es cerrado, entonces $E' \subseteq E$ y luego $\overline{E} = E' \cup E \subseteq E$. Como $E \subseteq \overline{E}$ vale siempre, vemos que $E = \overline{E}$. Recíprocamente, si $E = \overline{E}$ entonces por el ítem 1 vemos que E es cerrado. ■

Con la notación del resultado anterior, los ítems 1. y 2. muestran que $\overline{E}$ es el cerrado más chico (con respecto al orden de la inclusión) que contiene a E.

Obs 2.29. Sea X un conjunto

1. Si (X, d) es EM, $E \subseteq X$ entonces se verifica:
$$E^o = \bigcup_{A \in \tau_d \,,\, A \subseteq E} A \quad \text{y} \quad \overline{E} = \bigcap \{F \subseteq X : \ F \text{ es cerrado y } E \subseteq F\}\,.$$
2. Si d_1 y d_2 son dos métricas débilmente equivalentes en X entonces $\overline{E}^{d_1} = \overline{E}^{d_2}$. En efecto, notemos que como $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ entonces $F \subseteq X$ es cerrado con respecto a d_1 si y solo si $X \setminus F \in \tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ si y solo si F es cerrado con respecto a d_2. Entonces se puede usar el ítem 1. para concluir la igualdad de clausuras. De forma similar, en este caso se tiene que el interior de E con respecto a d_1 y con respecto a d_2 coinciden.

Las afirmaciones anteriores son ejercicios. △

Teorema 2.30. *Consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica (euclídea) usual. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $E \neq \emptyset$ y está acotado superiormente entonces $\alpha = \sup E \in \overline{E}$. En particular, si E es cerrado vale que $\alpha \in E$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in E$; como $E \subseteq \overline{E}$ entonces $\alpha \in \overline{E}$. Por otro lado, supongamos $\alpha \notin E$: si $r > 0$ notemos que $B_r(\alpha) = (\alpha - r, \alpha + r) \subseteq \mathbb{R}$; como α es la mínima cota superior de E y $\alpha - r < \alpha$ entonces existe $e \in E$ tal que $\alpha - r < e$; pero además, $e < \alpha$ (porque α es cota superior y $\alpha \notin E$). Así, $\alpha - r < e < \alpha$ garantiza que $e \in (B_r(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap E \neq \emptyset$. Lo anterior muestra que $\alpha \in E' \subseteq \overline{E}$. ■

Obs 2.31. Sea (X, d) EM y sea $Y \subseteq X$. Entonces podemos considerar el subespacio métrico (Y, d_Y), definido en la Observación 2.2. Si $E \subseteq Y$ entonces podemos considerar las nociones de interior, punto límite y clausura de E tanto con respecto al espacio métrico (X, d) como con respecto a (Y, d_Y) y en general, estas nociones no coinciden (re-interpretar el Ejemplo 2.15 en estos términos!).

En general, cuando nos referimos a propiedades de E con respecto al subespacio métrico (Y, d_Y), las indicamos como propiedades de E *relativas* a Y. Por ejemplo, podemos calcular el interior de E relativo a Y; cuando Y está sobre-entendido, entonces solo decimos el interior relativo de E (y expresiones similares cuando queremos indicar la clausura relativa de E, los puntos límites relativos de E, etc).

En muchos casos nos interesa saber si E es abierto (ó cerrado) relativo en Y: por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}$ como espacio métrico (con la métrica usual) e $Y = [0, 1]$, entonces $E = [0, 1/2) \subset Y$ es un abierto relativo en Y (pero claramente, E no es abierto en $\mathbb{R}$). Si consideramos $Z = (0, 1)$ entonces $F = [1/2, 1)$ es un cerrado relativo a Z (pero no es cerrado en $\mathbb{R}$). Ejercicios. $\triangle$

Teorema 2.32. *Sea (X, d) EM, sea $Y \subseteq X$ y consideremos el subespacio métrico (Y, d_Y). Si $E \subseteq Y$ entonces E es abierto relativo (en Y) si y solo si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $E = Y \cap U$.*

Demostración. Supongamos que E es un abierto relativo en Y: entonces, dado $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que la bola en Y

$$B^Y_{r_x}(x) = \{y \in Y : \ d_Y(x, y) = d(x, y) < r_x\} \subseteq E\,.$$

Pero entonces, se verifica (ejercicio sencillo) que

$$\bigcup_{x \in E} B^Y_{r_x}(x) = E\,.$$

Usando el centro y el radio anterior, podemos construir bolas abiertas en X dadas por $B_{r_x}(x) = \{y \in X : \ d(x, y) < r_x\}$ y el conjunto

$$U := \bigcup_{x \in E} B_{r_x}(x) \subseteq X\,.$$

Notemos que el Teorema 2.19 muestra que U es abierto en X. Además, usando la propiedad distributiva (de conjuntos)

$$U \cap Y = \left(\bigcup_{x \in E} B_{r_x}(x) \right) \cap Y = \bigcup_{x \in E} (B_{r_x}(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in E} B^Y_{r_x}(x) = E$$

donde usamos que $B_{r_x}(x) \cap Y = B^Y_{r_x}(x)$ que es una identidad de conjunto sencilla de verificar (ejercicio).

Recíprocamente, supongamos que existe U abierto en X tal que $E = Y \cap U$. Si $x \in E = Y \cap U$ entonces existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) = \{y \in X : \ d(x, y) < r_x\} \subseteq U$; pero entonces

$$B^Y_{r_x}(x) = B_{r_x}(x) \cap Y \subseteq U \cap Y = E$$

que muestra que E es un abierto relativo en Y. ■

Corolario 2.33. *Sea (X,d) EM, sea $Y \subseteq X$ y consideremos el subespacio métrico (Y, d_Y). Si $E \subseteq Y$ entonces E es cerrado relativo (en Y) si y solo si existe $F \subseteq X$ cerrado tal que $E = Y \cap F$.*

Demostración. Notemos que E es cerrado relativo en Y si y solo si $Y \setminus E$ es abierto relativo en Y. Por el resultado anterior, $Y \setminus E$ es abierto relativo en Y si y solo si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $Y \setminus E = Y \cap U$: pero

$$Y \setminus E = Y \cap U \Leftrightarrow E = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F$$

donde $F = X \setminus U$ es cerrado en X (notemos que de la misma forma $U = X \setminus F$). Los detalles faltantes del argumento quedan como ejercicio! $\square$

Corolario 2.34. *Sea (X,d) EM, sea $Y \subseteq X$ y sea $E \subseteq Y$.*

1. *Si Y es abierto entonces E es abierto relativo en Y si y solo si E es abierto en X.*

2. *Si Y es cerrado entonces E es cerrado relativo en Y si y solo si E es cerrado en X.*

Demostración. Ejercicio! Recordar las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados. $\square$

2.2 Conjuntos compactos en espacios métricos

En el estudio de las propiedades de las funciones continuas realizado en análisis I y II, se puede ver el papel fundamental que juegan los intervalos cerrados y acotados en la recta, y más generalmente los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ con la estructura de espacio métrico usual. Por ejemplo, las funciones a valores reales que son continuas en subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ alcanzan sus valores máximos y mínimos (y en particular, sus valores están acotados) y además verifican propiedades más fuertes que la continuidad (continuidad uniforme) que garantizan, entre otras cosas, que son integrables en el sentido de Riemann. Estos hechos (que hemos aceptado sin demostración) son esenciales para poder desarrollar la teoría.

Una pregunta natural es: ¿cuales son las propiedades de los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ que están detrás de todos estos hechos? En lo que sigue, vamos a desarrollar una serie de nociones que modelan las propiedades de estos conjuntos (en el contexto general de espacios métricos). Más aún, más adelante vamos a dar pruebas formales y detalladas de todos los hechos que hemos aceptado en Análisis I y II mencionados previamente.

Definición 2.35. Sea (X,d) EM y sea $E \subseteq X$.

1. Un cubrimiento de E por abiertos (en X) es una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $U_i \subseteq X$ es abierto para todo $i \in I$ (aquí I denota un conjunto de índices), de forma que
$$E \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i = \{x \in X : \ \exists i \in I \ , \ x \in U_i\} .$$

2. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de E por abiertos. Un subcubrimiento finito de E (del cubrimiento anterior) es una subfamilia $\{U_i\}_{i\in J}$ donde $J \subseteq I$ es un subconjunto finito tal que $E \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

$\triangle$

Ejemplo 2.36. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual y sea $E = (0, 1)$. Notemos que si $U_n = (1/n, 1)$, para $n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es un cubrimiento de E por abiertos. Notar que este cubrimiento no admite subcubrimientos finitos de E (ejercicio). $\triangle$

La siguiente noción modela la propiedad fundamental de los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.37. Sea (X, d) un EM y sea $K \subseteq X$. Decimos que K es compacto (en (X, d)) si todo cubrimiento de K por abiertos tiene un subcubrimiento finito (de K). $\triangle$

Ejemplos 2.38. Consideramos los siguientes ejemplos elementales:

1. Si (X, d) es EM y $K \subseteq X$ es conjunto finito, entonces K es compacto.

2. Si consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica usual, $(0, 1)$ no es compacto.

Obs 2.39. Sea (X, d) es EM, $Y \subset X$ y $K \subset Y$. Decimos que K es compacto relativo en Y si K es compacto en el subespacio métrico (Y, d_Y).

Teorema 2.40. *Sea (X, d) es EM, $Y \subset X$ y $K \subset Y$. Entonces K es compacto relativo en Y si y solo si K es compacto (en (X, d)).*

Demostración. Supongamos que K es compacto (en (X, d)) y sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de K por abiertos relativos de Y (es decir, $V_i \subseteq Y$ es abierto en el subespacio métrico (Y, d_Y) para todo $i \in I$). Por el Teorema 2.32, para cada $i \in I$ existe $U_i \subseteq X$ abierto, tal que $V_i = Y \cap U_i$. Notemos que por hipótesis,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i\,.$$

Como K es compacto en (X, d), existe $J \subseteq I$ subconjunto finito tal que $K \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$; como $K \subseteq Y$ se tiene que

$$K \subseteq (\bigcup_{i\in J} U_i) \cap Y = \bigcup_{i\in J}(U_i \cap Y) = \bigcup_{i\in J} V_i$$

de forma que $\{V_i\}_{i\in J}$ es un subcubrimiento finito de K del cubrimiento $\{V_i\}_{i\in I}$. Así, K es compacto relativo (es decir, en (Y, d_Y)).

Recíprocamente, supongamos que K es compacto relativo en Y. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de K por abiertos de X. Entonces $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Si definimos $V_i = U_i \cap Y$, se tiene que $V_i \subseteq Y$ es abierto relativo en Y para cada $i \in I$. Más aún, como $K \subseteq Y$

$$K \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap Y) = \bigcup_{i\in I} V_i\,.$$

Así, $\{V_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de K por abiertos relativos en Y. Por hipótesis, existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i$. Entonces

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

porque $V_i \subseteq U_i$, para $i \in J$. Lo anterior muestra que K es compacto en (X, d). ■

Obs 2.41. Sea (X,d) EM y sea $K \subseteq X$. El resultado anterior muestra que K es compacto en X si y solo si K es compacto en el subespacio métrico (K, d_K). Es decir, para estudiar la compacidad de K podemos restringir la métrica a K y olvidarnos del ambiente (pero ojo: no nos podemos olvidar de la métrica!). $\triangle$

Teorema 2.42. *Sea (X,d) EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Entonces K es cerrado.*

Demostración. Vamos a ver que $X \setminus K$ es abierto: sea $x \in X \setminus K$ fijo. Para cada $y \in K$, $x \neq y$ de forma que $d(x,y) > 0$ y consideramos $U_y = B_{d(x,y)/2}(y)$. Notemos que $\{U_y\}_{y\in K}$ (aquí usamos a K como conjunto de índices) es un cubrimiento de K por abiertos (cada $y \in K$ está en el U_y correspondiente). Como K es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{U_y\}_{y\in J}$, donde $J \subseteq K$ es un conjunto finito: digamos que $J = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq K$. Así, $U_{y_j} = B_{d(x,y_j)/2}(y_j)$, para $1 \leq j \leq n$ y se tiene que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j} = \bigcup_{j=1}^{n} B_{d(x,y_j)/2}(y_j)\,.$$

Sea $t = \min\{d(x,y_j)/2 :\ 1 \leq j \leq n\} > 0$; notemos que $1 \leq j \leq n$ entonces

$$B_t(x) \cap B_{d(x,y_j)/2}(y_j) = \emptyset\,.$$

De otra forma, existe $z \in X$ tal que $d(x,z) < t$ y $d(y_j,z) < d(x,y_j)/2$ con lo cual

$$d(x,y_j) \leq d(x,z) + d(z,y_j) < t + d(x,y_j)/2 \leq d(x,y_j)/2 + d(x,y_j)/2 = d(x,y_j)$$

que es una contradicción. Entonces

$$B_t(x) \cap K \subseteq B_t(x) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_{d(x,y_j)/2}(y_j)\right) = \bigcup_{j=1}^{n} (B_t(x) \cap B_{d(x,y_j)/2}(y_j)) = \emptyset\,.$$

Lo anterior muestra que $B_t(x) \subseteq X \setminus K$, con $t > 0$. Así, cada punto de $X \setminus K$ es interior a este conjunto, lo que dice que $X \setminus K$ es conjunto abierto; es decir, K resulta cerrado. ■

Proposición 2.43. *Sea (X,d) EM y $K \subseteq X$ un conjunto compacto. Entonces K es un conjunto acotado.*

Demostración. Consideramos el cubrimiento de K por abiertos $\{B_1(x)\}_{x\in K}$. Como K es compacto, existen finitos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ tal que $\{B_1(x_j)\}_{j=1}^n$ cubre a K, es decir,

$$K \subseteq U := \cup_{j=1}^{n} B_1(x_j)$$

Sea $r = \max\{d(x_i,x_j) :\ 1 \leq i \neq j \leq n\} \in \mathbb{R}$ (el máximo de esta colección finita de números reales está bien definido). Sea $y \in U$: entonces existe $1 \leq j \leq n$ tal que $y \in B_1(x_j)$ y vale que

$$d(x_1,y) \leq d(x_1,x_j) + d(x_j,y) < r + 1 \implies y \in B_{r+1}(x_1)\,.$$

Como $y \in U$ era arbitrario, $K \subseteq U \subseteq B_{r+1}(x_1)$, que muestra que K es conjunto acotado. ■

Obs 2.44. Sea (X,d) un EM y sea K compacto. Hemos probado que K resulta ser cerrado y acotado.

Pero ojo: en un espacio métrico (X,d) general, el hecho de que $F \subseteq X$ sea cerrado y acotado no alcanza para garantizar que F sea compacto!! Los ejemplos de este hecho requieren cierta elaboración que dejamos para más adelante. $\triangle$

Teorema 2.45. *Sea (X,d) EM, sea $K \subseteq X$ compacto y sea $F \subseteq K$ cerrado (que equivale a que $F \subseteq K$ es cerrado relativo). Entonces F es compacto.*

Demostración. A modo de observación, notemos que como K es compacto entonces resulta cerrado. Así, si $F \subseteq K$ vale que F es cerrado si y solo si F es cerrado relativo en K por el Corolario 2.34. De forma similar, F será compacto (en (X,d)) si y solo si F es compacto relativo en K, por el Teorema 2.40.

Supogamos que $F \subseteq K$ es cerrado en X. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de F por abiertos de X. Entonces consideramos la familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus F\}$: notemos que esta familia cubre todo X (ejercicio). En particular, esta familia es un cubrimiento de K por abiertos; como K es compacto existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ talque $\{U_i\}_{i\in J} \cup \{X \setminus F\}$ cubre a K es decir,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i \cup (X \setminus F)\,.$$

Como $F \subseteq K$ se tiene que

$$F = F \cap K \subseteq F \cap \left(\bigcup_{i\in J} U_i \cup (X \setminus F)\right) = \bigcup_{i\in J} (F \cap U_i) \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

donde hemos usado la propiedad distributiva y el hecho de que $F \cap (X \setminus F) = \emptyset$. Lo anterior muestra que $\{U_i\}_{i\in J}$ es un subcubrimiento finito de F (del cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$). Así, F resulta compacto. ■

Corolario 2.46. *Sea (X,d) EM, $K \subseteq X$ compacto y $F \subseteq X$ cerrado. Entonces $K \cap F \subseteq X$ es compacto.*

Demostración. Como K es compacto entonces es cerrado. Así, $F \cap K \subseteq X$ es cerrado por el Teorema 2.19. Además, es claro que $F \cap K \subseteq K$. Así, por el resultado anterior, $F \cap K$ es compacto en X. ■

Teorema 2.47 (Propiedad de intersección finita (pif))**.** *Sea (X,d) EM, sea $A \neq \emptyset$ y sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de conjuntos compactos en (X,d) tal que para todo subconjunto finito y no vacío $J \subseteq A$*

$$\bigcap_{\alpha\in J} K_\alpha \neq \emptyset\,.$$

Entonces $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \emptyset$.

Demostración. Si $A = \{\alpha_0\}$ es conjunto unitario, el enunciado es claramente cierto. Supongamos que $\alpha_0 \in A$ y tal que $A \setminus \{\alpha_0\} \neq \emptyset$. Supongamos que $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha = \emptyset$ (y llegamos a una contradicción). Entonces, (por las leyes de De Morgan)

$$\bigcup_{\alpha\in A} X \setminus K_\alpha = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha)\right) = X\,.$$

Entonces

$$K_{\alpha_0} = K_{\alpha_0} \cap X = K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcup_{\alpha\in A} X \setminus K_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}} (X \setminus K_\alpha) \cap K_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}} (X \setminus K_\alpha)$$

donde hemos usando que $(X \setminus K_{\alpha_0}) \cap K_{\alpha_0} = \emptyset$. Así, $\{(X \setminus K_\alpha)\}_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto K_{α_0}. Sea $J \subseteq A \setminus \{\alpha_0\}$ conjunto finito tal que

$$K_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} (X \setminus K_\alpha)\,.$$

Notemos que en este caso

$$\emptyset = K_{\alpha_0} \cap (X \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in J}(X \setminus K_\alpha)\right) = K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{\alpha\in J} K_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in(J\cup\{\alpha_0\})} K_\alpha$$

que contradice la hipótesis porque $J \cup \{\alpha_0\} \subseteq A$ es finito y no vacío. ■

Corolario 2.48. *Sea (X, d) EM y sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $K_n \subseteq X$ es compacto $K_n \neq \emptyset$, y tal que $K_{n+1} \subseteq K_n$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Notemos que de la hipótesis $K_{n+1} \subseteq K_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$ (encaje) se deduce que si $m \geq n$ entonces $K_m \subseteq K_n$.

Veamos que esta sucesión (familia indicada por $\mathbb{N}^*$) de compactos verifica la pif: sea $J \subseteq \mathbb{N}^*$ subconjunto finito y no vacío. En este caso, está bien definido $m = \max J \in \mathbb{N}^*$: entonces para cada $n \in J$ se tiene que $m \geq n$ y luego $K_m \subseteq K_n$. En particular,

$$\emptyset \neq K_m \subseteq \bigcap_{n\in J} K_n \implies \bigcap_{n\in J} K_n \neq \emptyset\,.$$

Entonces podemos aplicar el resultado anterior y concluir que la intersección de la familia completa es no vacía, es decir: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset$. ■

Teorema 2.49. *Sea (X, d) EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Si $E \subseteq K$ es conjunto infinito entonces $K \cap E' \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponemos que $K \cap E' = \emptyset$ (y llegamos a una contradicción). Así, si $x \in K$ entonces ($x \notin E'$ y) existe $r_x > 0$ tal que $(B_{r_x}(x) \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$ de forma que $B_{r_x}(x) \cap E$ tiene a lo más un punto. De esta forma, construimos $\{B_{r_x}(x)\}_{x\in K}$ que es cubrimiento de K por abiertos. Como K es compacto existe un conjunto finito $J \subseteq K$ tal que $\{B_{r_x}(x)\}_{x\in J}$ cubre a K. En este caso,

$$E = E \cap K \subseteq E \cap \left(\bigcup_{x\in J} B_{r_x}(x)\right) = \bigcup_{x\in J} B_{r_x}(x) \cap E\,.$$

Pero por cada $x \in J$ existe a lo sumo un $e_x \in E$ tal que $e_x \in B_{r_x}(x)$ (por construcción); es decir, cada $B_{r_x}(x) \cap E$ tiene a lo sumo un elemento, para $x \in J$. Esto muestra que E tiene una cantidad de elementos menor ó igual que la cantidad de elementos de J. Esto contradice nuestra hipótesis de que E era conjunto infinito. ■

Cabe remarcar que el resultado anterior de alguna *fuerza* la existencia de puntos límites de cada subconjunto infinito $E \subseteq K$ de un conjunto compacto K (y además muestra que estos puntos límites deben estar en el compacto: pero esto último ya lo sabíamos, porque $E \subseteq K$ implica que $E' \subseteq \overline{E} \subseteq K$, porque K es cerrado).

En lo que sigue vamos a desarrollar una serie de resultados con el objetivo de probar que los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ con su métrica usual (es decir, la métrica euclídea) son compactos.

Teorema 2.50. *Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de intervalos cerrados, acotados y no vacíos en $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) tal que $I_{n+1}\subseteq I_n$ para $n\in\mathbb{N}^*$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\neq\emptyset$.*

Demostración. Notemos que $I_n=[a_n,b_n]$, con a_n, $b_n\in\mathbb{R}$ tales que $a_n\leq b_n$, $n\in\mathbb{N}^*$ (aquí la expresión *intervalo cerrado* corresponde al hecho de que es un intervalo, que como conjunto, es cerrado en $\mathbb{R}$ con la métrica usual). Como $I_{n+1}\subseteq I_n$ para $n\in\mathbb{N}^*$ entonces, si $n\leq m$ vale que $I_m\subseteq I_n$, lo que muestra que $a_n\leq a_m\leq b_m\leq b_n$, para $n\leq m\in\mathbb{N}^*$. Así, si $E=\{a_n:\ n\in\mathbb{N}^*\}\subseteq\mathbb{R}$ entonces $E\neq\emptyset$ y E está acotado superiormente; de hecho b_n es cota superior, para todo $n\in\mathbb{N}^*$. Sea $x=\sup E\in\mathbb{R}$: entonces $a_n\leq x$, $n\in\mathbb{N}^*$ (porque x es cota superior de E) y $x\leq b_n$, $n\in\mathbb{N}^*$ (porque b_n es cota superior de E y x es la mínima cota superior de E). Así, $x\in I_n$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$, lo que muestra que $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\neq\emptyset$. ■

Definición 2.51. Sea $k\in\mathbb{N}^*$. Una k-celda cerrada es un subconjunto $I\subseteq\mathbb{R}^k$ para el cual existen a_i, $b_i\in\mathbb{R}$, $a_i\leq b_i$, para $1\leq i\leq k$ tales que

$$I=\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i]=\{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k:\ a_i\leq x_i\leq b_i\ ,\ 1\leq i\leq k\}\,.$$

△

Notemos que si $I\subseteq\mathbb{R}^k$ es una k-celda cerrada, entonces I es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual (ejercicio).

Teorema 2.52. *Sea $k\in\mathbb{N}^*$. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de k-celdas cerradas tal que $I_{n+1}\subseteq I_n$, para $n\in\mathbb{N}^*$ (la sucesión está encajada). Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\neq\emptyset$.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $n\in\mathbb{N}^*$ existen $a_{i,n}$, $b_{i,n}\in\mathbb{R}$ tales que $a_{i,n}\leq b_{i,n}$, $1\leq i\leq k$, de forma que

$$I_n=\prod_{i=1}^{k}[a_{i,n},b_{i,n}]=\{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k:\ a_{i,n}\leq x_i\leq b_{i,n}\ ,\ 1\leq i\leq k\}\,,\quad n\geq 1\,.$$

Como $I_{n+1}\subseteq I_n$ concluimos que $a_{i,n}\leq a_{i,n+1}\leq b_{i,n+1}\leq b_{i,n}$, para $n\in\mathbb{N}^*$. Fijado $1\leq i\leq k$, se tiene que $\{[a_{i,n},b_{i,n}]\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión de intervalos cerrados, acotados, no vacíos y encajados en $\mathbb{R}$. Por el resultado anterior, existe $x_i\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[a_{i,n},b_{i,n}]$ es decir,

$$a_{i,n}\leq x_i\leq b_{i,n}\quad\text{para todos}\quad n\in\mathbb{N}^*\ ,\ 1\leq i\leq k\,.$$

Así, podemos ver que

$$(x_1,\ldots,x_k)\in\prod_{i=1}^{k}[a_{i,n},b_{i,n}]=I_n\quad\text{para todo}\quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Finalmente, notemos que lo anterior dice que $(x_1,\ldots,x_k)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\neq\emptyset$. ■

Sea $I=\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i]\subset\mathbb{R}^k$ una k-celda cerrada. Definimos el diámetro de I, notado $\operatorname{diam}(I)$, dado por $\operatorname{diam}(I)=(\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)^2)^{1/2}=\|(b_i)_{i=1}^k-(a_i)_{i=1}^k\|$ (norma euclídea usual). Es un ejercicio (□) probar que vale que

$$\operatorname{diam}(I)=\sup\{d(x,y):\ x,\ y\in I\}$$

donde $d(x,y)=\|y-x\|$ denota la distancia euclídea usual.

Teorema 2.53. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}^k$ una k-celda cerrada. Si consideramos a $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual (euclídea) I es conjunto compacto.*

Demostración. Por hipótesis, existen a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$ tales que

$$I = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ , \ 1 \leq i \leq k\} .$$

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento de I por abiertos de $\mathbb{R}^k$ (con la métrica usual). Suponemos que este cubrimiento no tiene subcubrimientos finitos de I (y llegamos a un absurdo). Definimos $c_i = (a_i + b_i)/2$ el punto intermedio entre a_i y b_i, $1 \leq i \leq k$; además, definimos

$$J_{i,1} = [a_i, c_i] \subseteq \mathbb{R} \quad \text{y} \quad J_{i,2} = [c_i, b_i] \subseteq \mathbb{R} \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq k .$$

Definimos el conjunto de índices $M = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) : \ \varepsilon_j \in \{1, 2\}, \, 1 \leq j \leq k\}$ que es un conjunto de 2^k elementos. Para cada $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in M$ definimos

$$Q_\varepsilon = \prod_{i=1}^{k} J_{i,\varepsilon_i} = \{(x_1, \ldots, x_k) : \ x_i \in J_{i,\varepsilon_i} \ , \ 1 \leq i \leq k\} .$$

Por ejemplo, si $\varepsilon = (1, \ldots, 1)$ entonces

$$Q_{(1,\ldots,1)} = \prod_{i=1}^{k} [a_i, c_i] .$$

De esta forma construimos 2^k conjuntos $\{Q_\varepsilon : \ \varepsilon \in M\}$, cada uno de los cuales es una k-celda cerrada; más aún, notemos que

$$\bigcup_{\varepsilon \in M} Q_\varepsilon = I$$

es decir, $\{Q_\varepsilon\}_{\varepsilon \in M}$ es un cubrimiento de I (Ejercicio).

La igualdad anterior dice que cada Q_ε es una k-celda más chica que I; pero podemos afirmar este hecho con un poco más de detalle. En efecto, notemos que

$$\operatorname{diam}(Q_\varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^{k} (\frac{b_i - a_i}{2})^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(I)$$

para cada $\varepsilon \in M$ (ejercicio $\square$). Notemos que como cada $Q_\epsilon \subseteq I$, entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento de Q_ε por abiertos, para cada $\varepsilon \in M$. Si fuera cierto que para cada $\varepsilon \in M$ hay un subcubrimiento finito $\{U_\alpha\}_{\alpha \in F_\varepsilon}$ (con $F_\varepsilon \subseteq A$ conjunto finito) de Q_ε, entonces notemos que

$$I = \bigcup_{\varepsilon \in M} Q_\varepsilon \subseteq \bigcup_{\varepsilon \in M} \left(\bigcup_{\alpha \in F_\epsilon} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$$

donde $F = \bigcup_{\varepsilon \in M} F_\epsilon \subseteq A$ es un conjunto finito (unión finita de conjuntos finitos). Pero este último hecho contradice nuestra hipótesis de que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no tiene subcubrimientos finitos de I. Así, existe algún $\varepsilon \in M$ tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no tiene subcubrimientos finitos de $I_1 := Q_\varepsilon$.

De esta forma, hemos obtenido una k-celda cerrada $I_1 \subseteq I$, tal que $\mathrm{diam}(I_1) = 1/2\ \mathrm{diam}(I)$. Además, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento de I_1 por abiertos, que no tiene subcubrimiento finito de I_1. Estamos como cuando empezamos, pero ahora con I_1: podemos repetir el procedimiento anterior y obtener una k-celda cerrada $I_2 \subseteq I_1$ tal que $\mathrm{diam}(I_2) = 1/2\ \mathrm{diam}(I_1) = 1/2^2\ \mathrm{diam}(I)$, y tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento de I_2 por abiertos, que no tiene subcubrimiento finito de I_2. Y repetimos.

Así, obtenemos una sucesión de k-celdas cerradas $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\mathrm{diam}(I_n) = \frac{1}{2^n}\ \mathrm{diam}(I)$ y tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento de I_n por abiertos, que no tiene subcubrimiento finito de I_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Por el Teorema 2.52 existe $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \subseteq I$. En particular, existe $\alpha_0 \in A$ tal que $z \in U_{\alpha_0}$. Como U_{α_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subseteq U_{\alpha_0}$. Pero aquí viene el problema: sea $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathrm{diam}(I_n) = \frac{1}{2^n} < r$; si $y \in I_n$ es arbitrario (recordemos que $z \in I_n$) entonces

$$d(z, y) \leq \mathrm{diam}(I_n) < r \implies I_n \subseteq B_r(z) \subseteq U_{\alpha_0}\,.$$

donde hemos usado la propiedad del diámetro de las celdas comentada antes de este teorema. Pero entonces $\{U_{\alpha_0}\}$ (el U_{α_0} solito) es un subcubrimiento finto I_n, en contra de la propiedad con la que construimos I_n. Esta contradicción muestra que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ debe tener algún subcubrimiento finito de I. ■

Teorema 2.54. *Consideremos $\mathbb{R}^k$ con su métrica usual (euclídea). Dado $K \subset \mathbb{R}^k$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *K es cerrado y acotado.*
2. *K es compacto.*
3. *Todo subconjunto infinito $E \subseteq K$ es tal que $E' \cap K \neq \emptyset$.*

Demostración. 1. implica 2. Supongamos que K es cerrado y acotado. Entonces existe $r > 0$ y $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ tales que $E \subseteq B_r(x)$. Si $y = (y_1, \ldots, y_k) \in B_r(x)$ entonces

$$|y_i| - |x_i| \leq |y_i - x_i| \leq \|y - x\| < r \implies |y_i| \leq |x_i| + r \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq k\,.$$

Así, si $m = \max\{|x_i| :\ 1 \leq i \leq k\}$ se ve que si $y \in B_r(x)$ entonces $|y_i| \leq m + r$, $1 \leq i \leq k$. Esto último dice que $B_r(x) \subseteq I$, donde I es la k-celda cerrada

$$I = \prod_{i=1}^{k} [-m - r, m + r]\,.$$

Como I es compacta y $K \subseteq I$ es cerrado, entonces K resulta compacto por el Teorema 2.45.

2. implica 3. Por otro lado, si K es compacto hemos visto que si $E \subseteq K$ es conjunto infinito entonces $E' \cap K \neq \emptyset$ (Teorema 2.49).

Para ver que 3. implica 1. argumentamos por contra-recíproca: suponemos que no vale 1. y vemos que no vale 3. Si no vale 1. entonces o bien K no es cerrado, ó bien K no es acotado. Si K no es cerrado entonces existe $x \in K'$ tal que $x \notin K$. Como consecuencia de la Proposición 2.12 vemos que si $r > 0$ entonces $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap K$ es conjunto infinito (porque sacarle un elemento a un conjunto no cambia que sea infinito). En particular, podemos elegir $x_1 \in (B_1(x) \setminus \{x\}) \cap K$; de forma análoga, podemos elegir $x_2 \in (B_{1/2}(x) \setminus \{x\}) \cap K$ tal que

$x_2 \neq x_1$ (porque tenemos infinitos elementos para elegir, y elegimos uno distinto de x_1) Así, para cada $n \in N^*$, $n \geq 2$, podemos elegir $x_n \in (B_{1/n}(x) \setminus \{x\}) \cap K$ tal que $x_n \neq x_i$, para $1 \leq i \leq n-1$. De esta forma construimos el conjunto infinito $E = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq K$. Veamos que $E' \cap K = \emptyset$: en efecto, si $z \in K$ entonces $z \neq x$: entonces $d(x, z) = r > 0$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $0 < 1/n_0 < r/2$. En este caso, $d(z, x) \leq d(z, x_n) + d(x_n, x)$ que muestra que

$$d(z, x_n) \geq d(x, z) - d(x, x_n) > r - 1/n > r/2 \quad \text{para} \quad n \geq n_0 \,.$$

Lo anterior muestra que $B_{r/2}(z) \cap E \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$ es un conjunto finito; de esta forma, $z \notin E'$ y $E' \cap K = \emptyset$.

Por otro lado, si K no es acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe $x_n \in K$ tal que $|x_n| \geq n$. Entonces podemos construir $E = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ que es un conjunto infinito (verificar). Sea $x \in K$ y sea $r = |x| \geq 0$. Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $r + 1 < n_0$; así, si $n \geq n_0$ entonces

$$|x_n - x| \geq |x_n| - |x| \geq r + 1 - r = 1 \quad \text{para} \quad n \geq n_0 \,.$$

Lo anterior indica que $B_1(x) \cap E \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$, que es un conjunto finito. Pero entonces $z \notin E'$. Lo anterior muestra que $K \cap E' = \emptyset$ en este caso también. ■

Teorema 2.55 (Weierstrass). *Todo subconjunto acotado e infinito $E \subseteq \mathbb{R}^k$ verifica que $E' \neq \emptyset$.*

Demostración. Si E es acotado hemos visto que podemos encerrarlo en una k-celda cerrada $I \subseteq \mathbb{R}^k$, es decir $E \subseteq I$. Como I es compacta y E es infinito entonces hemos probado que $E' \cap I \neq \emptyset$. Pero esto último indica que $E' \neq \emptyset$. ■

Ejemplo 2.56. Consideremos nuevamente el Ejemplo 2.7. Consideramos

$$D = \{f \in \ell_\infty(\mathbb{R}) : \ \|f\|_\infty \leq 1\} \,.$$

Es claro que $D \subseteq \ell_\infty(\mathbb{R})$ es un conjunto acotado en el espacio métrico $\ell_\infty(\mathbb{R})$ con la métrica inducida por $\| \cdot \|_\infty$. Además, es un conjunto cerrado (ejercicio). Consideramos

$$E = \{f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \ / \ f(n) \in \{0, 1\} \in D \ , \ n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq D \,.$$

Hemos visto que E es un conjunto no numerable (usando el argumento diagonal de Cantor). Notemos además que si $f,\ g \in E$ son tales que $f \neq g$ entonces $d(f, g) = \|f - g\| = 1$ (ejercicio). En este caso decimos que E es un conjunto *separado* con constante de separación 1 (en general decimos que un conjunto E es separado si existe algún $\delta > 0$ tal que $d(x, y) \geq \delta$, para todo $x,\ y \in E$ con $x \neq y$ y $\delta > 0$ es una constante de separación).

El hecho de que E sea separado implica que $E' = \emptyset$: en efecto, notemos que si $h \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ entonces $B_{1/2}(h) = \{k \in \ell_\infty(\mathbb{R}) : \ \|h - k\|_\infty < 1/2\}$ puede contener a lo sumo un elemento de E, porque si $f,\ g \in E$ son tales que $\|h - f\|_\infty < 1/2$, $\|h - g\|_\infty < 1/2$ tendríamos que $\|f - g\|_\infty < 1$ (por desigualdad triangular, pasando por h) en contra del hecho de que E está separado con constante de separación 1.

Lo anterior muestra que $E' \cap D = \emptyset$ lo cual muestra que D no es compacto, por el Teorema 2.49. Así, vemos que en general ser cerrado y acotado en un espacio métrico no implica ser compacto. △

2.3 Conjuntos conexos

Definición 2.57. Sea (X, d) EM.

1. Decimos que X es disconexo si existen U, $V \subseteq X$ conjuntos abiertos, $U \neq \emptyset \neq V$, tales que
$$U \cap V = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cup V = X\,.$$

2. Decimos que X es conexo si X no es disconexo.

3. Dado $Y \subseteq X$ decimos que Y es disconexo en X (respectivamente conexo en X) si el (sub-)espacio métrico (Y, d_Y) es disconexo (respectivamente conexo).

Obs 2.58. Sea (X, d) EM, $Y \subseteq X$. Sean U, $V \subseteq X$ dos conjuntos abiertos tales que
$$U \cap V \cap Y = \emptyset \quad \text{y} \quad Y \subseteq U \cup V\,.$$

Si se verifica que $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$ entonces $Y \subseteq X$ es disconexo. En efecto, si definimos $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$ entonces U', $V' \subseteq Y$ son abiertos relativos en Y (es decir, U', V' son abiertos en el subespacio (Y, d_Y)) por el Teorema 2.32. Por hipótesis, $U' \neq \emptyset \neq V'$ son tales que $U' \cap V' = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = U \cap V \cap Y = \emptyset$ y
$$Y = Y \cap (U \cup V) = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = U' \cup V'\,.$$

Lo anterior indica que Y es disconexo.

Recíprocamente, si Y es disconexo, existen U', $V' \subseteq Y$ abiertos relativos en Y tales que $U' \neq \emptyset \neq V'$, $U' \cap V' = \emptyset$ y $U' \cup V' = Y$. Por el Teorema 2.32 existen U, $V \subseteq X$ tales que $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. En este caso es sencillo verificar que $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, $U \cap V \cap Y = \emptyset$ y $Y \subseteq U \cup V$. $\triangle$

Teorema 2.59. *Consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica (euclídea) usual. Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y solo si tiene la siguiente propiedad: si a, $c \in E$ y $b \in \mathbb{R}$ es tal que $a < b < c$ entonces $b \in E$ (es decir, E es convexo).*

Demostración. Supongamos que E no es convexo, es decir que existen a, $c \in E$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$ y $b \notin E$. Entonces podemos definir $U = (-\infty, b)$ y $V = (b, \infty)$ que son dos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que $a \in U \cap E \neq \emptyset$, $c \in V \cap E \neq \emptyset$, $U \cap V \cap E = \emptyset$ y (como $b \notin E$) $E \subseteq U \cup V$. Por la Observación 2.58 vemos que $E \subseteq \mathbb{R}$ no es conexo.

Por otro lado, si E no es conexo entonces existen abiertos relativos no vacíos U', $V' \subseteq E$ tales que $U' \cap V' = \emptyset$ y $E = U' \cup V'$. Recordemos que en este caso existen abiertos U, $V \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $U' = E \cap U$ y $V' = E \cap V$. Tomemos $x \in U'$, $y \in V'$ y supongamos (sin pérdida de la generalidad) que $x < y$. Entonces $U' \cap [x, y] \subseteq \mathbb{R}$ es conjunto no vacío y acotado superiormente (por y). Sea $z = \sup(U' \cap [x, y]) \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 2.30 vemos que $z \in \overline{U' \cap [x, y]} \subseteq \overline{U'}$, donde la clausura es en $\mathbb{R}$.

Si $z \in V'$ entonces, como V' es abierto relativo existe $r > 0$ tal que $E \cap B_r(z) \subseteq V'$; pero $\emptyset \neq B_r(z) \cap U' = (B_r(z) \cap E) \cap U' \subseteq V' \cap U'$, que contradice la hipótesis sobre U' y V'. En resumen: $z \notin V'$ y en particular $x \leq z < y$. Finalmente, consideramos los siguientes dos casos:

Si $z \in U'$ entonces $z \notin \overline{V'}$ (clausura en $\mathbb{R}$): de otra forma, existe $r > 0$ tal que $E \cap B_r(z) \subseteq U'$ pero entonces $\emptyset \neq B_r(z) \cap V' = (B_r(z) \cap E) \cap V' \subseteq U' \cap V'$ que contradice la hipótesis sobre U' y V'. Luego existe $t > 0$ tal que $B_t(z) = (z-t, z+t)$ es tal que $B_t(z) \cap V' = \emptyset$. Lo anterior dice que $x \leq z < z_1 = z + t/2 < y$ (porque $z < y$); pero entonces $z_1 \notin U'$ (porque z es cota superior de $U' \cap [x, y]$) con $z \in U'$, $y \in V'$. Además, $z_1 \notin V'$, porque $z_1 \in B_t(z)$ y $B_t(z) \cap V' = \emptyset$. Así, $x < z_1 < y$ con $z_1 \notin E$.

Por otro lado, si $z \notin U'$ (recordemos que $z \notin V'$), entonces $x < z < y$, con $x \in U' \subseteq E$, $y \in V' \subseteq E$ y $z \notin E$. En cualquier caso, concluimos que E no es convexo. ■

2.4 Ejercicios

Ejercicio 11. Sean d_1 y d_2 dos métricas distintas en M. Probar que $d_1 + d_2$ y $\max\{d_1, d_2\}$ son métricas en M.

Ejercicio 12. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \geq 0$ es cóncava si para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a + b = 1$ se tiene

$$f(ax + by) \geq af(x) + bf(y).$$

Sea (M, d) un espacio métrico y sea f una función tal que:

- f es cóncava.
- $f(0) = 0$.
- $f(x) > 0$ si $x > 0$.
- Si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.

Probar que la función que resulta de la composición $f \circ d$ es también una distancia en M.

Sugerencia: Para la desigualdad triangular primero probar que $f(tx) \geq tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$. Luego usar la siguiente identidad

$$f(a) + f(b) = f\left((a+b)\frac{a}{a+b}\right) + f\left((a+b)\frac{b}{a+b}\right).$$

Ejercicio 13. Dado un espacio métrico (X, d) y dos subconjuntos no vacíos A y B probar que si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B).$$

Use la propiedad anterior para probar que la unión finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado. Por último dar un ejemplo donde $A \cap B = \emptyset$ y

$$\operatorname{diam}(A \cup B) > \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B).$$

Ejercicio 14. Probar que dado $a = (a_j)_{j=1}^n$ en $\mathbb{R}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \quad \|a\|_\infty = \max\{|a_j| : \ 1 \leq j \leq n\}$$

son dos normas en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 15. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Definimos

a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$,

b) $d_2(x,y) = |x-y|^{1/2}$,

c) $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$,

d) $d_4(x,y) = |x-2y|$,

e) $d_5(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Determinar, para cada una de ellas, si es una métrica en $\mathbb{R}$ o no.

Ejercicio 16. Consideramos

$$X = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \quad f \text{ es función continua } \} .$$

Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

donde hemos considerado la integral de Riemann de la función continua $|f(x) - g(x)|$ en $[0,1]$. Probar que d es una métrica.

Ejercicio 17. Hallar el conjunto de puntos límite y el interior de los siguientes conjuntos:

a) $\mathrm{A} = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$.

b) $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 4\} \subset \mathbb{R}^n$.

c) $\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 2\} \subset \mathbb{R}^n$.

d) $\mathrm{D} = (0,3] \times \{2\} \subset \mathbb{R}^2$.

e) $\mathrm{E} = (0,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 18. Para cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior determinar si son cerrados, abiertos y/o acotados.

Ejercicio 19. Sea $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea.

a) Probar que si $E = \{(1/n, 0) : \ n \in \mathbb{N}^*\}$ entonces $E^o = \emptyset$, $\mathrm{Ais}(E) = E$ y $E' = \{(0,0)\}$. Probar además que E no es abierto ni cerrado; pero E es acotado.

b) Sea $E = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ d(p,(0,0)) \leq 1\}$. Probar que $E^o = B_1((0,0))$, $\mathrm{Ais}(E) = \emptyset$, $E' = E$. Probar además que E es cerrado, no es abierto, y es acotado.

Ejercicio 20. Construir un conjunto acotado de números reales que tenga exactamente tres puntos límite.

Ejercicio 21. Consideramos

$$D = \{f \in \ell_\infty(\mathbb{R}) : \ \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Probar que $D \subset \ell_\infty(\mathbb{R})$ es un conjunto acotado en el espacio métrico $\ell_\infty(\mathbb{R})$ con la métrica inducida por $\|\cdot\|_\infty$ y que además es un conjunto cerrado.

Ejercicio 22. Probar lo siguiente:

a) En $\mathbb{R}^n$ las métricas inducidas por las normas euclídea, y las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son fuertemente equivalentes (entre sí).

b) Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = |1/x - 1/y|$ y $d_2(x,y) = |x-y|$ son débilmente equivalentes, pero no son fuertemente equivalentes.

c) Las métricas en $(0,1)$ dadas por $d_1(x,y) = 1$ si $x \neq y$ y $d_1(x,y) = 0$ si $x = y$ (métrica discreta) y $d_2(x,y) = |x-y|$ no son débilmente equivalentes.

Ejercicio 23.

a) Sea $I = [a,b]$ un intervalo cerrado de números reales. Probar que existe una familia $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos reales abiertos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} \subset J_n$ y tal que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = I.$$

b) Sea $J = (a,b)$ un intervalo abierto de números reales. Probar que existe una familia $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos reales cerrados tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I_{n+1}$ y tal que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = J.$$

Ejercicio 24. Probar que

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

d) $A \subset B \Rightarrow A^o \subset B^o$.

e) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$ ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

f) $(A \cup B)^o \supseteq A^o \cup B^o$.

Ejercicio 25. Sea X un conjunto infinito. Para $p, q \in X$, definimos

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & p \neq q \\ 0 & p = q \end{cases}.$$

Probar que es una métrica ¿Qué subconjuntos del espacio X con esta métrica son abiertos, cuáles cerrados y cuáles compactos?

Ejercicio 26.

a) Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual y sea $E = (0,1)$. Probar que dado $U_n = (1/n, 1)$ para $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es un cubrimiento de E por abiertos. Probar que que este cubrimiento no admite subcubrimientos finitos de E

b) Dar un ejemplo de un cubrimiento del intervalo $[a, b)$ que no tenga un subcubrimiento finito.

Ejercicio 27. Demostrar que si $A, B \subset \mathbb{R}$ son compactos, entonces $A \times B$ es compacto en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 28. Sea $f \in C(\mathbb{R})$ definida por

$$f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}.$$

Para todo $n \geq 1$ definimos

$$f_n(x) = f(2n(n+1)(x - 1/n)).$$

Probar:

- $0 \leq f(x) \leq 1$ para $x \in \mathbb{R}$.
- $0 \leq f_n(x) \leq 1$ para $x \in \mathbb{R}$.
- La restricción de f_n al conjunto $[0,1]$ pertenece a $C([0,1])$.
- $\|f_n\|_\infty = 1$.
- $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ si $n \neq m$.
- La bola cerrada en $C([0,1])$ no es compacta.

Ejercicio 29. Consideremos a $\mathbb{Q}$ (el conjunto de números racionales) como un espacio métrico dotado de la métrica $d(p,q) = |p - q|$. Sea E el conjunto de todos los $p \in \mathbb{Q}$ tal que $2 < p^2 < 3$. Probar que el conjunto E es cerrado y acotado en $\mathbb{Q}$ pero no es compacto. ¿Es E abierto en $\mathbb{Q}$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 30. Sea X el conjunto de todas las sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\geq 1}$ para las cuales

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 < \infty.$$

Se suele usar la notación l^2 para este conjunto.

a) En este conjunto l^2 podemos considerar la métrica

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Probar que efectivamente es una métrica.

b) Consideremos las siguiente sucesiones $x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$, es decir, todos los términos de la sucesión son cero excepto el n-ésimo el cual es uno. Probar que estas sucesiones pertenecen a l^2.

c) Sea $K \subset l^2$ el conjunto que contiene a todas las sucesiones definidas en el ítem anterior, es decir,

$$K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{donde } x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$$

Probar que el conjunto K es **cerrado y acotado** pero **no compacto** en l^2.

Ejercicio 31. Dados

$$A = [1, 2] \cup [3, 4] \subset \mathbb{R}$$

y

$$B = [2, 5] \subset \mathbb{R}.$$

Probar que $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ es compacto por definición, es decir, que todo cubrimiento por abiertos de $A \times B$ admite un subcubrimiento finito.

Importante: No pueden usar resultados de la práctica y deducir el ejercicio como caso particular. Deben resolver el ejercicio por definición.

Ejercicio 32. En $\mathbb{C}^3$ se define la función

$$\begin{aligned} N : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3|. \end{aligned}$$

Observar que esta función N es una norma (no hace falta demostrarlo).Estudiar justificando si el conjunto

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 = \overline{x}_2 + \overline{x}_3\}$$

es compacto en $(\mathbb{C}^3, N)$.

Importante: No deben justificar que N es una norma. Pueden asumir que lo es.

Ejercicio 33. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \|x\| + \|y\| & x \neq y \end{cases}$$

donde $\|x\|$ denota la norma euclídea $\mathbb{R}^2$ (es decir la distancia al origen). Sea

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a - 2)^2 + (b - 2)^2 < 1\}.$$

Probar que S es abierto y cerrado en $\mathbb{R}^2$. ¿Es el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ conexo? Justificar.

Importante: No deben justificar que d es una métrica en $\mathbb{R}^2$, pueden asumir que lo es.

Ejercicio 34. Demostrar que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.

Ejercicio 35. ¿Es la clausura y el interior de un conjunto conexo también conexo?

Sugerencia: Demostrar que si E es conexo y $E \subset F \subset \overline{E}$, entonces F es conexo.

Ejercicio 36. Probar que todo conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Sugerencia: Probar que dados dos conjuntos separados A y B de $\mathbb{R}^n$ existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $p(t_0) \notin A \cup B$, donde

$$p(t) = (1-t)a + tb,$$

$t \in [0,1]$.

Ejercicio 37. Sea

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

y

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Probar por definición que $A \cup B$ es conexo.

Importante: Deben resolver el ejercicio por definición.

Ejercicio 38.

a) Sean A, B conexos ¿Qué se puede decir sobre la conexidad de $A \cup B$ y de $A \cap B$?

b) Sean A, B conexos con intersección no vacía. Probar que $A \cup B$ es conexo.

Ejercicio 39. Probar que para un espacio métrico (X,d) son equivalentes:

a) X es conexo, es decir, no se puede dividir en dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos U, V.

b) X no se puede escribir como la unión de dos conjuntos no vacios **separados**.

   Obs: Recordamos que dos conjuntos U, V son **separados** si cada uno es disjunto de la clausura del otro, es decir $U \cap \overline{V} = \emptyset$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Por ejemplo $A = (1,2]$ y $B = (2,3]$ son disjuntos pero no separados.

c) Los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

   Obs: Los conjuntos con esta propiedad se conocen como **clopen sets**.

3 Sucesiones y series

En este capítulo vamos a estudiar la convergencia de sucesiones (y series) en espacios métricos. Este concepto está relacionado a la noción de *completud* de un espacio métrico, que es fundamental en el análisis.

3.1 Convergencia de sucesiones en espacios métricos

Sea X un conjunto. Recordemos que una sucesión en X es una función $f : \mathbb{N}^* \to X$ (ó bien $f : \mathbb{N} \to X$). En este caso, a la sucesión también la notamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ó $(x_n)_{n\geq 1}$, donde $x_n = f(n)$ para $n \in \mathbb{N}^*$.

Definición 3.1. Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X.

1. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en (X, d) si existe $p \in X$ tal que: para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tal que
$$d(p, x_n) < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0\,.$$
En este caso decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$ y que $p \in X$ es el límite de $(x_n)_{n\geq 1}$ y notamos
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p \quad \text{ó} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = p\,.$$

2. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge en (X, d) si la sucesión no converge en (X, d).

$\triangle$

Obs 3.2. Sea (X, d) EM.

1. Notemos que la noción de convergencia de una sucesión depende tanto de X como de la métrica d. Por ejemplo: sea $x_n = 1/n$, $n \geq 1$ y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Es claro que esta sucesión converge a $p = 0$ en este caso. Pero notemos que si consideramos $Y = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ como subespacio métrico, entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en Y que no converge en el subespacio métrico (Y, d_Y) (porque $0 \notin Y$).

2. Por otro lado, si una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X diverge entonces, para todo $p \in X$ debe existir $\epsilon = \epsilon(p) > 0$ tal que: para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $d(p, x_n) > \epsilon$ (que surge de negar la definición de convergencia, ejercicio).

$\triangle$

Definición 3.3. Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada si existe $q \in X$ y $t > 0$ tal que $x_n \in B_t(q)$, para todo $n \geq 1$ (es decir, el conjunto $\{x_n :\ n \geq 1\} \subseteq X$ está acotado). $\triangle$

Teorema 3.4. *Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X.*

1. *$(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$ si y solo si: para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.*

2. *Supongamos que $p, q \in X$ son tales que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p y también a q. Entonces $p = q$.*

3. *Si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge en* X *entonces es acotada.*

4. *Si* $E \subseteq X$ *y* $p \in E'$ *entonces existe una sucesión* $(e_n)_{n\geq 1}$ *tal que:* $e_n \in E$*,* $e_n \neq p$*,* $n \geq 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} e_n = p$ *en* (X, d)*.*

Demostración. Para ver 1., supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$ y sea $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$. En este caso existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subseteq U$, porque U es abierto. Si tomamos éste $\epsilon > 0$ en la definición de convergencia, entonces debe existir $n_0 \geq 1$ tal que $d(p, x_n) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Así, si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in B_\epsilon(p) \subseteq U$ y por lo tanto $x_n \in U$. Recíprocamente, supongamos que para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Dado $\epsilon > 0$ consideramos $U = B_\epsilon(p)$ que es un abierto que contiene a p; así, debe existir $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in B_\epsilon(p)$, es decir $d(x_n, p) < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Esto último muestra (por definición) que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$.

Para verificar 2., supongamos que $p \neq q$: en este caso, $d(p, q) > 0$. Si tomamos $\epsilon = d(p, q)/2 > 0$ entonces existen $n_0,\, n_1 \geq 1$ tales que $d(x_n, p) < \epsilon$ si $n \geq n_0$ y $d(x_n, q) < \epsilon$ si $n \geq n_1$; si $n \geq \max\{n_0,\, n_1\} \geq 1$ entonces notemos que

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \epsilon + \epsilon = d(p, q)\,.$$

La contradicción anterior muestra que se debe verificar que $p = q$.

Veamos 3. Por hipótesis existe $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ (y por el ítem anterior ahora sabemos que este $p \in X$ es el único límite!). Si tomamos $\epsilon = 1 > 0$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que para $n \geq n_0$, $d(p, x_n) < 1$. Consideremos

$$M = \max\{d(p, x_n) :\ 1 \leq n \leq n_0\} \geq 0$$

y sea $r = M + 1 \geq \max\{M,\, 1\}$; entonces vale que $d(p, x_n) < r$ para todo $n \geq 1$: esto se ve mirando los casos $1 \leq n \leq n_0$ y $n \geq n_0$ (ejercicio).

Finalmente, verificamos 4: por hipótesis, para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(p) \cap E$ es conjunto infinito: en particular, para cada $n \geq 1$, $B_{1/n}(p) \cap E$ es conjunto infinito y podemos elegir un elemento $x_n \in B_{1/n}(p) \cap E$ tal que $x_n \neq p$. De esta forma la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ satisface: $x_n \in E$, $x_n \neq p$, $n \geq 1$ por construcción. Además, dado $\epsilon > 0$ sea $n_0 \geq 1$ tal que $0 < 1/n_0 < \epsilon$: en este caso, si $n \geq n_0$ entonces $0 < 1/n \leq n/n_0 < \epsilon$ y $d(p, x_n) < 1/n < \epsilon$. Esto último muestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. ■

Obs 3.5. Sea (X, d) EM y sea $\tau_d = \{U \subseteq X :\ U \text{ es abierto}\}$, la topología inducida por d. La caracterización de la convergencia de sucesiones dada en el ítem 1. del resultado anterior muestra que la noción de convergencia solo depende de τ_d. Es decir, si d_1 y d_2 son dos métricas en X que son débilmente equivalentes es decir, $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ entonces: dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X y dado $p \in X$ vale que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en (X, d_1) si y solo si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en (X, d_2) (ejercicio de vista). △

En lo que sigue vamos a considerar el cuerpo de los números complejos con la métrica inducida por el módulo, es decir: dados $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$d(z, w) = |z - w| = (\overline{(z - w)}(z - w))^{1/2}\,.$$

Recordemos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ está incluido como cuerpo y como subespacio métrico. Notemos que podemos considerar el concepto de convergencia en este espacio métrico particular.

Teorema 3.6. *Supongamos que* $(s_n)_{n\geq 1}$, $(t_n)_{n\geq 1}$ *son sucesiones en* $\mathbb{C}$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$ *y* $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{C}$. *Entonces*

1. $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$.

2. *Si* $c \in \mathbb{C}$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \cdot s \in \mathbb{C}$ *y* $\lim_{n\to\infty} c + s_n = c + s \in \mathbb{C}$.

3. $\lim_{n\to\infty}(s_n \cdot t_n) = s \cdot t$.

4. *Si* $t \neq 0$ *entonces existe* $n_0 \geq 1$ *tal que* $t_n \neq 0$ *para todo* $n \geq n_0$*: en este caso existe*

$$\lim_{n\geq n_0\ ,\ n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{s}{t}\,.$$

5. $\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n = \overline{s}$.

Demostración. 1. Sea $\epsilon > 0$; por hipótesis existen $n_0 \geq 1$ y $n_1 \geq 1$ tales que $|s_n - s| < \epsilon/2$ para $n \geq n_0$ y $|t_n - t| < \epsilon/2$ para $n \geq n_1$. En este caso, sea $n_2 = \max\{n_0,\, n_1\}$: si $n \geq n_2$

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| = |(s_n - s) + (t_n - t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,,$$

que prueba 1.

2. Si $c = 0$ entonces $s_n \cdot c = 0$ para todo $n \geq 1$ y en este caso es sencillo verificar que $(s_n \cdot c)_{n\geq 1}$ converge a $0 = s \cdot c$. Supongamos que $c \neq 0$ y sea $\epsilon > 0$: sea $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{|c|}$ (donde usamos que $\frac{\epsilon}{|c|} > 0$ está definido y la hipótesis de convergencia). Entonces, si $n \geq n_0$

$$|s_n \cdot c - s \cdot c| = |(s_n - s) \cdot c| = |(s_n - s)| \cdot |c| < \frac{\epsilon}{|c|} \cdot |c| = \epsilon$$

que prueba la primera afirmación del ítem 2. La segunda afirmación es un ejercicio $\square$.

3. Notemos la identidad (ejercicio)

$$s_n \cdot t_n = s \cdot t + (s_n - s) \cdot (t_n - t) + s \cdot (t_n - t) + t \cdot (s_n - s)\,. \tag{1}$$

De las hipótesis de convergencia, concluimos que (ejercicio)

$$\lim_{n\to\infty} t_n - t = \lim_{n\to\infty} s_n - s = 0$$

Del ítem 2. deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} s \cdot (t_n - t) = \lim_{n\to\infty} t \cdot (s_n - s) = 0\,.$$

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ existen $n_0,\, n_1 \geq 1$ tales que:

$$|s_n - s| < \sqrt{\epsilon} \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \text{y} \quad |t_n - t| < \sqrt{\epsilon} \quad \text{si} \quad n \geq n_1\,,$$

donde usamos que $\sqrt{\epsilon} > 0$. Sea $n_2 = \max\{n_0,\, n_1\}$ y sea $n \geq n_2$: entonces

$$|(s_n - s) \cdot (t_n - t)| = |(s_n - s)| \cdot |(t_n - t)| < \sqrt{\epsilon} \cdot \sqrt{\epsilon} = \epsilon\,,$$

que prueba que $\lim_{n\to\infty}(s_n - s)\cdot(t_n - t) = 0$. Aplicando los hechos anteriores, el ítem 1 (tres veces) y el ítem 2. (con la suma) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} s_n \cdot t_n = \lim_{n\to\infty}(s\cdot t + (s_n - s)\cdot(t_n - t) + s\cdot(t_n - t) + t\cdot(s_n - s)) = s\cdot t + 0 + 0 + 0 = s\cdot t\,.$$

Veamos la prueba de 4. Si $t \neq 0$ entonces $|t| > 0$; sea $\epsilon = |t|/2 > 0$ y sean $n_0 \geq 1$ tal que $|t_n - t| < |t|/2$ siempre que $n \geq n_0$. Entonces, si $n \geq n_0$:

$$|t| = |t - t_n + t_n| \leq |t - t_n| + |t_n| \implies 0 < |t|/2 < |t| - \underbrace{|t_n - t|}_{<|t|/2} \leq |t_n|$$

y en particular, $t_n \neq 0$ y $|1/t_n| \leq 2/|t|$. Veamos que la sucesión $(1/t_n)_{n\geq n_0}$ converge a $1/t$. En efecto: sea $\epsilon > 0$ y sea $n_1 \geq n_0$ tal que

$$|t_n - t| < \frac{1}{2}|t|^2\,\epsilon\,,$$

donde hemos usado que $|t|^2\,\epsilon > 0$. Entonces, si $n \geq n_1 (\geq n_0)$

$$\left|\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t}\right| = \left|\frac{t - t_n}{t_n\cdot t}\right| < \left|\frac{1}{t_n\cdot t}\right|\ \frac{1}{2}|t|^2\,\epsilon \leq \epsilon$$

donde hemos usado que $|1/t_n| \leq 2/|t|$, de forma que

$$\left|\frac{1}{t_n\cdot t}\right| = \left|\frac{1}{t}\right|\cdot\left|\frac{1}{t_n}\right| \leq \frac{2}{|t|^2}\,.$$

Finalmente, como $\frac{s_n}{t_n} = s_n \cdot \frac{1}{t_n}$ con $n \geq n_0$, el ítem 3 muestra que vale 4.

Para verificar el ítem 5., notemos que

$$|\overline{s} - \overline{s}_n| = |\overline{s - s_n}| = |s - s_n|$$

por las propiedades de la conjugación y el módulo. Lo anterior implica que vale 5. (los detalles son ejercicio). □

Obs 3.7. Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ que converge a $s \in \mathbb{C}$. Definimos $a_n = \Re(s_n)$ y $b_n = \Im(s_n)$, $n \geq 1$. Entonces las sucesiones reales $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ convergen a $\Re(s)$ y $\Im(s)$ en $\mathbb{R}$ respectivamente. En efecto,

$$|a_n - \Re(s)| = |\Re(s_n) - \Re(s)| = |\Re(s_n - s)| \leq |s_n - s|\,.$$

De forma análoga, $|b_n - \Im(s)| \leq |s_n - s|$. Las desigualdades anteriores prueban que $\lim_{n\to\infty} a_n = \Re(s)$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \Im(s)$ en $\mathbb{R}$.

En particular, si $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a $s \in \mathbb{C}$ entonces $s \in \mathbb{R}$ (el límite de una sucesión real es un valor real). En efecto, basta notar que $\Im(s_n) = 0$, $n \geq 1$. Por el párrafo anterior $0 = \lim_{n\to\infty} \Im(s_n) = \Im(s)$, que muestra que $s \in \mathbb{R}$. △

En lo que sigue consideramos $\mathbb{R}^k$ con su estructura usual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Además consideramos la métrica (euclídea) usual de $\mathbb{R}^k$ inducida por la norma euclídea, que proviene del producto interno usual de $\mathbb{R}^k$.

Teorema 3.8. *Consideremos* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *con su métrica (euclídea) usual.*

1. *Sea* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es sucesión en* $\mathbb{R}^k$,

$$x_n = (\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{k,n}) \in \mathbb{R}^k \quad \textit{para} \quad n \geq 1$$

y sea $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$. *Entonces* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge a* x *en* $(\mathbb{R}^k, d_k)$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ *en* $(\mathbb{R}, d_1)$ *(con su métrica euclídea usual) para* $1 \leq j \leq k$.

2. *Sean* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *sucesiones en* $\mathbb{R}^k$, *y sea* $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ *sucesión en* $\mathbb{R}$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}^k \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}^k \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

   (a) $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y \in \mathbb{R}^k$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n \cdot x_n = \gamma \cdot x \in \mathbb{R}^k$.
   (c) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$
   (d) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \in \mathbb{R}$.

Demostración. 1. Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x en $(\mathbb{R}^k, d_k)$. Fijado $1 \leq j \leq k$, consideramos la sucesión real $(\alpha_{j,n})_{n\geq 1}$, dada por las j-ésimas coordenadas de los vectores en $(x_n)_{n\geq 1}$. Queremos verificar que esta sucesión converge en $(\mathbb{R}, d_1)$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Para ver esto, sea $\epsilon > 0$: por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\epsilon > d_k(x_n, x) = \|x_n - x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} (\alpha_{i,n} - \alpha_i)^2\right)^{1/2} \geq \left((\alpha_{j,n} - \alpha_j)^2\right)^{1/2} = |\alpha_{j,n} - \alpha_j| = d_1(\alpha_{j,n}, \alpha_j)$$

donde hemos usado que la suma de términos no negativos es más grande que cada término individual y el hecho de que la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ es una función monótona creciente (verificar). Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ en $(\mathbb{R}, d_1)$, $1 \leq j \leq k$.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ en $(\mathbb{R}, d_1)$, $1 \leq j \leq k$. Sea $\epsilon > 0$: por hipótesis, para cada $1 \leq j \leq k$ existe $n_j \geq 1$ tal que

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{k}} > d_1(\alpha_{j,n}, \alpha_j) = |\alpha_{j,n} - \alpha_j| \geq 0 \quad \text{para} \quad n \geq n_j\,.$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\} \geq 1$: si $n \geq n_0$ entonces $n \geq n_j$ para $1 \leq j \leq k$ y entonces

$$d_k(x_n, x) = \|x_n - x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} (\alpha_{i,n} - \alpha_i)^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \epsilon$$

que muestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

Para probar $2a$) podemos usar el criterio dado en el ítem 1. (ya probado) y el Teorema 3.6. En efecto, si escribimos

$$y = (\beta_1, \dots, \beta_k) \quad \text{y} \quad y_n = (\beta_{1,n}, \dots, \beta_{k,n}) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

entonces
$$x_n + y_n = (\alpha_{1,n} + \beta_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n} + \beta_{k,n}) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad n \geq 1\,.$$
Como $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ en $(\mathbb{R}^k, d_k)$ entonces, por el ítem 1, vemos que $\lim_{n\to\infty} \beta_{j,n} = \beta_j$ en $(\mathbb{R}, d_1)$ para $1 \leq j \leq k$. Por el Teorema 3.6 y los hechos anteriores, ahora podemos ver que
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} + \beta_{j,n} = \alpha_j + \beta_j \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq k\,.$$
El ítem 1 nos permite concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$ en $(\mathbb{R}^k, d_k)$.

La prueba de los ítems 2*b*) y 2*c*) es similar (ejercicio).

Para ver 2*d*), notamos que
$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \implies \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$
De forma similar $\|x\| - \|x_n\| \leq \|x - x_n\| = \|(-1)(x_n - x)\| = \|x_n - x\|$. Las desigualdades anteriores muestran que
$$d_1(\|x_n\|, \|x\|) = |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|\,.$$
Así, dado $\epsilon > 0$, si $n_0 \geq 1$ es tal que $d_k(x_n, x) = \|x_n - x\| < \epsilon$, para $n \geq n_0$ entonces: $d_1(\|x_n\|, \|x\|) < \epsilon$, para $n \geq n_0$. Esto último prueba 2*d*). ■

3.2 Subsucesiones

Definición 3.9. Sea X un conjunto y sean $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en X. Decimos que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ si existe una función $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente (si $n < m$ entonces $f(n) < f(m)$) tal que $y_n = x_{f(n)}$, para $n \geq 1$.

En este caso notamos $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ (donde $n_k = f(k)$ para $k \geq 1$) para indicar que $(y_k)_{k\geq 1}$ es subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$. △

Obs 3.10. Dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X podemos pensar que una subsucesión se obtiene de tomar algunos de sus términos dando *saltos hacia adelante*:
$$x_1 \qquad x_2 \qquad \underbrace{x_3}_{=x_{n_1}} \qquad x_4 \qquad \underbrace{x_5}_{=x_{n_2}} \qquad x_6 \qquad x_7 \quad \underbrace{x_8}_{=x_{n_3}} \qquad x_9 \qquad x_{10} \ldots$$
donde hemos elegido los saltos $f(1) = n_1 = 3$, $f(2) = n_2 = 5$, $f(3) = n_3 = 8$, ...

Obs 3.11. Sea X un conjunto y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X. Sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión determinada por la función estrictamente creciente $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. Notemos que $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ es en sí misma una sucesión (donde $y_k = x_{f(k)}$, $k \geq 1$). De forma que podemos tomar una subsucesión $(z_j)_{j\geq 1} = (y_{k_j})_{j\geq 1}$ de la sucesión $(y_k)_{k\geq 1}$, determinada por la la función estrictamente creciente $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ (es decir, $z_j = y_{h(j)}$, $j \geq 1$). Entonces $(z_j)_{j\geq 1}$ es también una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$: en efecto, sea $g = f \circ h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la composición de las funciones estrictamente crecientes h y f. Entonces g es estrictamente creciente: si $n < m$ entonces $h(n) < h(m)$ y luego $g(n) = f(h(n)) < f(h(m)) = g(m)$; además, $z_j = y_{h(j)} = x_{f(h(j))} = x_{g(j)}$, $j \geq 1$.

Así, una subsucesión de una subsucesión es subsucesión! △

Obs 3.12. Sea $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una función estrictamente creciente. Entonces $f(k) \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Verificamos lo anterior por inducción: notemos que $f(1) \in \mathbb{N}^*$ y luego $f(1) \geq 1$. Si asumimos que $k \geq f(k)$ para un cierto $k \in \mathbb{N}^*$ entonces $f(k+1) > f(k) \geq k$ que muestra que $f(k+1) \geq k+1$. △

Proposición 3.13. *Sea (X, d) EM, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X y sea $p \in X$. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en X entonces toda subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a p en X.*

Demostración. Suponemos que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ en X, y sea $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión. En este caso, existe $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente, tal que $y_k = x_{f(k)}$ para $k \in \mathbb{N}^*$.

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(p, x_n) < \epsilon$. Por la observación anterior, si $k \geq n_0$ entonces $f(k) \geq k \geq n_0$, de forma que $d(p, y_k) = d(p, x_{f(k)}) < \varepsilon$. Pero esto indica que $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} p$ en X. □

Proposición 3.14. *Sea (X, d) EM, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X y sea $p \in X$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a p en X si y solo si se verifica que: para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(x_n, p) < \varepsilon\}$ es infinito.*

Demostración. Sea $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión. En este caso, existe $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente, tal que $y_k = x_{f(k)}$ para $k \in \mathbb{N}^*$: notemos f es inyectiva en este caso. Supongamos que $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} p$ en X: si $\varepsilon > 0$ entonces por hipótesis existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $k \geq k_0$ $d(p, y_k) = d(p, x_{f(k)}) < \varepsilon$. Lo anterior muestra que

$$A = \{f(k) : \ k \geq k_0\} \subseteq B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(p, x_n) < \varepsilon\}\,.$$

Como A es conjunto infinito (porque f es inyectiva), concluimos que B es conjunto infinito.

Recíprocamente, supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(x_n, p) < \varepsilon\}$ es infinito. En particular, tomando $\varepsilon = 1$ podemos elegir $n_1 \in B_1$. Supogamos que hemos elegido $n_1 < \ldots < n_k$ tales que $n_j \in B_{1/j}$ para $1 \leq j \leq k$: entonces, como $B_{1/(k+1)}$ es infinito, podemos elegir $n_{k+1} \in B_{1/(k+1)}$ tal que $n_{k+1} > n_k$ (de otra forma, $B_{1/(k+1)} \subseteq \{1, \ldots, n_k\}$ que contradice que $B_{1/(k+1)}$ sea infinito). Continuando de esta forma, determinamos una función $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ dada por $f(k) = n_k$, $k \in \mathbb{N}^*$: f resulta estrictamente creciente (por la construcción de n_k, $k \geq 1$). Sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ la subsucesión construida a partir de f. Si $\varepsilon > 0$ entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $1/k_0 < \varepsilon$: si $k \geq k_0$ entonces $1/k \leq 1/k_0 < \varepsilon$ y como $x_{n_k} \in B_{1/k}$ entonces $d(p, x_{n_k}) < 1/k < \varepsilon$, con lo que $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a p en X. □

Corolario 3.15. *Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X. Entonces*

$$\mathcal{L} = \{x \in X : \ \exists \text{ una subsucesión } (x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x\} \subseteq X$$

es un conjunto cerrado en (X, d).

Demostración. Veamos que $X \setminus \mathcal{L}$ es abierto: sea $y \in X \setminus \mathcal{L}$. Por la Proposición 3.14 existe $\varepsilon > 0$ tal que $C = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(y, x_n) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N}^*$ es un conjunto finito. Si $z \in B_\varepsilon(y)$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subseteq B_\varepsilon(y)$ (porque $B_\varepsilon(y)$ es abierta). Sea $D = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(z, x_n) < \delta\}$: si $n \in D$ entonces $x_n \in B_\delta(z)$ de forma que $x_n \in B_\varepsilon(y)$ y luego $n \in C$. Así, $D \subseteq C$ que muestra que D es un conjunto finito y que $z \in X \setminus \mathcal{L}$ por la Proposición 3.14. El argumento anterior muestra que $B_\varepsilon(y) \subseteq X \setminus \mathcal{L}$. □

Teorema 3.16. *Sea (X, d) EM y sea $K \subseteq X$ compacto. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en K (es decir, $x_n \in K$, $n \geq 1$). Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a un punto en K.*

Demostración. Sea $A = \{x_n : \ n \geq 1\} \subset K$. Si A es un conjunto finito, entonces debe existir $p \in A$ tal que $B = \{n \in \mathbb{N}^* : \ p = x_n\}$ es infinito. En este caso, podemos constuir una función $f : \mathbb{N}^* \to B \subseteq \mathbb{N}^*$ estrictamente creciente: en efecto, como B es no vacío, sea $b_1 \in B$ y definimos $f(1) = b_1$. Como B es infinito debe existir $b_2 \in B$ tal que $b_2 > b_1$ (de otra forma, $B \subseteq \{1, \ldots, b_1\}$, que contradice que B es infinito) y definimos $f(2) = b_2$; si suponemos definidos $f(1) < \ldots < f(k) \in B$ entonces, como B es infinito, debe existir $b_{k+1} \in B$ tal que $b_{k+1} > f(k)$ y definimos $f(k+1) = b_{k+1}$... De esta forma, la subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ asociada a f es constantemente igual a $p \in K$, con lo cual converge a p (ejercicio).

Si suponemos que $A \subset K$ es conjunto infinito, como K es compacto se debe tener que $A' \cap K \neq \emptyset$ (probado en Cap 2). Sea $p \in A' \cap K$: por propiedades de A', si $\varepsilon > 0$ se tiene que $C_\varepsilon = B_\varepsilon(p) \cap A$ es conjunto infinito. Así, si definimos

$$B_\epsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : \ d(x_n, p) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N}^*$$

debe ser infinito: en efecto, si $z \in C_\varepsilon$ entonces existe $n \in \mathbb{N}^*$ (posiblemente no único!) tal que $z = x_n$ y $d(p, x_n) = d(p, z) < \varepsilon$, de forma que $n = h(z) \in B_\varepsilon$. Así queda definida una función $h : C_\varepsilon \to B_\varepsilon$; pero h es inyectiva: si z, $w \in C_\epsilon$ son tales que $z \neq w$ entonces claramente $h(z) \neq h(w)$ (porque $z = x_{h(z)} \neq w = x_{h(w)}$); como h es inyectiva y C_ε es infinito, entonces $h(C_\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon$ es infinito. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, la Proposición 3.14 muestra que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a p. $\square$

Corolario 3.17. *Consideremos $(\mathbb{R}^k, d)$ con la métrica usual. Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ tiene una subsucesión convergente en $\mathbb{R}^k$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada, es decir tal que $\{x_n : \ n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}^k$ sea un conjunto acotado. En este caso, podemos encontrar un $M > 0$ tal que la sucesión esté contenida en $\overline{B}_M(0) = \{z \in \mathbb{R}^k : \ d(z, 0) \leq M\}$. Como $\overline{B}_M(0) \subseteq \mathbb{R}^k$ es cerrado y acotado (ejercicio) entonces resulta compacto. Por el Teorema 3.16 concluimos que, en particular, $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente (a un punto del compacto $\overline{B}_M(0)$). $\square$

3.3 Sucesiones de Cauchy

Definición 3.18. Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy[1] si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que si m, $n \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. $\triangle$

Definición 3.19. Sea (X, d) EM y sea $A \subseteq X$ no vacío. Definimos el diámetro de A, notado $\operatorname{diam}(A)$, dado por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : \ x, \, y \in A\} \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}\,.$$

$\triangle$

[1]En honor al matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Ejemplo 3.20. Sea $(\mathbb{R}^k, d)$ con la métrica (euclídea) usual; sean a_j, $b_j \in \mathbb{R}$ tales que $a_j \leq b_j$, $1 \leq j \leq k$. Entonces, si

$$A = \prod_{j=1}^{k} [a_j, b_j] = \{(x_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k : \ a_j \leq x_j \leq b_j \ , \ 1 \leq j \leq k\}$$

entonces $\operatorname{diam}(A) = (\sum_{j=1}^k (b_j - a_j)^2)^{1/2}$ (ejercicio). △

Obs 3.21. Sea (X, d) EM y sea $A \subseteq X$ no vacío. Verificar las siguientes afirmaciones (ejercicios):

1. $\operatorname{diam}(A) = \infty$ si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existen x, $y \in A$ tales que $d(x, y) \geq n$.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.
3. Si $\operatorname{diam}(A) < r < \infty$ y $x \in A$ entonces $A \subseteq B_r(x)$.
4. Si $r > 0$ y $x \in X$ entonces $\operatorname{diam}(B_r(x)) \leq 2r$.
5. A es acotado si y solo si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Proposición 3.22. *Sea (X, d) EM y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Entonces diam(A) =diam$(\overline{A})$.*

Demostración. Como $A \subseteq \overline{A}$ el ítem 2 de la observación anterior muestra que $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$. Por otro lado, si $p, q \in \overline{A}$ entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen x, $y \in A$ tales que $d(p, x) < \varepsilon$ y $d(q, y) < \varepsilon$ (porque $B_\epsilon(p) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(q) \cap A \neq \emptyset$, ver Cap 2). Por la desigualdad triangular

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) \leq d(p, x) + (d(x, y) + d(y, q)) < d(x, y) + 2\varepsilon \leq \operatorname{diam}(A) + 2\varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $d(p, q) \leq \operatorname{diam}(A)$. Como p, $q \in \overline{A}$ eran arbitrarios, $\operatorname{diam}(A)$ es una cota superior del conjunto $\{d(p, q) : \ p, q \in \overline{A}\}$. Entonces, $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A)$. □

Proposición 3.23. *Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X.*

1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces la sucesión es acotada.*
2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por a_n =diam$\{x_m : \ m \geq n\}$ está en $\mathbb{R}$ y es tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < 1$. Consideremos $r = \max\{d(x_1, x_n) : \ 1 \leq n \leq n_0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Notemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces: si $1 \leq n \leq n_0$, $d(x_1, x_n) \leq r < r + 1$. Por otro lado, si $n_0 \leq n$ entonces $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n) < r + 1$. Así, $A = \{x_n : \ n \geq 1\} \subseteq B_{r+1}(x_1)$ y es un conjunto acotado. En particular, por la observación anterior, está definido $\operatorname{diam}\{x_n : \ n \geq 1\} < \infty$.

Si suponemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces como $\{x_m : \ m \geq n\} \subseteq A = \{x_m : \ m \geq 1\}$ concluimos que $0 \leq a_n \leq \operatorname{diam}(A) \in \mathbb{R}$. Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si n, $m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Así, dado $n \geq n_0$, si r, $s \geq n$ $(\geq n_0)$ entonces $d(x_r, x_s) < \varepsilon$, de forma que $0 \leq a_n \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Así, $d_\mathbb{R}(a_n, 0) = |a_n - 0| = a_n \leq \varepsilon$, si $n \geq n_0$; esto muestra que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) a 0.

Recíprocamente, si la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ está en $\mathbb{R}$ y converge (con la métrica usual) a 0 entonces: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\sup\{d(x_m, x_t) : \ m,\, t \geq n\} = \operatorname{diam}\{x_m : \ m \geq n\} = a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$$

Como $n_0 \geq n_0$ (ja!) vemos que si $m,\, t \geq n_0$ entonces $d(x_m, x_t) < \varepsilon$. Esta última afirmación muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ es sucesión de Cauchy en (X, d). □

Proposición 3.24. *Sea (X, d) EM y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X.*

1. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X entonces es de Cauchy.*
2. *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p \in X$ entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$.*

Demostración. 1. Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(p, x_n) < \epsilon/2$. Entonces, si $n, m \geq n_0$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,.$$

2. Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y tal que su subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a $p \in X$. Sea $\epsilon > 0$: por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n,\, m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$. Además, existe $k_0 \geq n_0$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $d(p, x_{n_k}) < \epsilon/2$. Entonces, si $n \geq n_0$:

$$d(p, x_n) \leq d(p, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

donde hemos usado que $n_{k_0} \geq k_0 \geq n_0$ para acotar el segundo término de arriba. □

Teorema 3.25. *Sea (X, d) EM, sea $K \subseteq X$ compacto y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en K. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X si y solo si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Hemos visto que toda sucesión convergente es de Cauchy. Por otro lado, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en K que es de Cauchy. Entonces, por el Teorema 3.16 $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge en X. Por el ítem 2 de la proposición anterior concluimos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en X. □

Teorema 3.26. *Sea $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^k$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}^k$ si y solo si $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy.*

Demostración. Basta probar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy entonces converge. En este caso, por la Proposición 3.23 $(x_n)_{n\geq 1}$ es acotada. Entonces, por el Corolario 3.17 $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente. Finalmente, por la Proposición 3.24 vemos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge. □

Obs 3.27. El teorema anterior se llama criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}^k$: la gran ventaja de este criterio sobre la definición de convergencia es que podemos determinar que una sucesión converge sin la necesidad de conocer (ó determinar) el (límite) punto al cual converge. △

La Observación anterior motiva la siguiente noción

Definición 3.28. Sea (X, d) EM. Decimos que (X, d) es un EM completo si toda sucesión de Cauchy en (X, d) converge en (X, d).

Notemos que el Teorema 3.26 muestra que $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual es un espacio métrico completo. El Teorema 3.25 prueba que si (X, d) es EM tal que X es compacto, entonces (X, d) es completo. Por otro lado, si (X, d) es un EM completo entonces notemos que vale un criterio de Cauchy: una sucesión en (X, d) converge si y solo si es de Cauchy (momento de reflexión).

Teorema 3.29. *El espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$ con la métrica usual es completo.*

Demostración. Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ que es de Cauchy. Para cada $n \geq 1$ sea $a_n = \Re(z_n) \in \mathbb{R}$ y $b_n = \Im(z_n) \in \mathbb{R}$ las partes real e imaginarias de z_n. Notemos que

$$|a_n - a_m| = |\Re(z_n) - \Re(z_m)| = |\Re(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| = d(z_n, z_m)\,.$$

De forma similar, $|b_n - b_m| \leq |z_n - z_m|$. Las desigualdades anteriores muestran que las sucesiones reales $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$, con la métrica usual (dada por el módulo en $\mathbb{R}$). Como $\mathbb{R}$ es completo, existen a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dado $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(z_n - (a + b\,i)) &= |(a_n + b_n i) - (a + b\,i)| = |(a_n - a) + (b_n - b)\,i)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b|\,. \end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad triangular del módulo y el hecho de que $|i| = 1$. Las desigualdades anteriores muestran que $\lim_{n\to\infty} z_n = a + b\,i \in \mathbb{C}$. $\square$

Proposición 3.30. *Sea (X, d) EM y sea $E \subseteq X$. Dado $p \in X$ entonces $p \in \overline{E}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Si $p \in E$ estamos, porque $E \subseteq \overline{E}$. Si $p \notin E$ entonces $p \neq x_n \in E$ para todo $n \geq 1$. Sea $\epsilon > 0$; por hipótesis existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(p, x_n) < \varepsilon$. Pero en este caso, $x_{n_0} \in (B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset$. Lo anterior muestra que $p \in E' \subseteq \overline{E}$.

Recíprocamente, sea $p \in \overline{E} = E \cup E'$. Si $p \in E$ entonces podemos definir $x_n = p$, $n \geq 1$. En este caso $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en E que converge a p. Por otro lado, si $p \notin E$ entonces $p \in E'$: en este caso hemos probado en la Proposición 3.4 que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E que converge a p. $\square$

Corolario 3.31. *Sea $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual, y $E \subseteq \mathbb{R}$. Si E está acotado superiormente entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup E$.*

Demostración. Recordemos que hemos probado que $\sup E \in \overline{E}$. Ahora podemos aplicar la Proposición 3.30. $\triangle$

Proposición 3.32. *Sea (X, d) EM completo y sea $E \subseteq X$ cerrado. Entonces el subespacio métrico (E, d_E) es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en (E, d_E). Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X. Por hipótesis existe $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Pero esto último muestra que $p \in \overline{E} = E$ (porque E es cerrado). Ahora es sencillo verificar que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $p \in E$ en el subespacio métrico (E, d_E). $\square$

3.4 Sucesiones en $\mathbb{R}$

En lo que sigue vamos a considerar $\mathbb{R}$ (y más generalmente $\mathbb{R}^k$) con la métrica usual $d(r,s) = |r-s|$, $r, s \in \mathbb{R}$. Recordemos que en $\mathbb{R}$ tenemos definido una relación de orden, que tiene la propiedad de la mínima cota superior. Esto sugiere considerar las siguientes nociones.

Definición 3.33. Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Decimos que es

1. monótona creciente si $s_n \leq s_{n+1}$ para $n \geq 1$.

2. monótona decreciente si $s_n \geq s_{n+1}$ para $n \geq 1$.

3. monótona si es monótona creciente ó monótona decreciente.

$\triangle$

Dada una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ decimos que está acotada superiormente (respectivamente inferiormente) si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ (respectivamente $x_n \geq M$), $n \geq 1$. Notemos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ está acotada (en el sentido de espacios métricos) si y solo si está acotada superiormente e inferiormente a la vez! (ejercicio).

A modo de observación, notemos que una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ que es monótona creciente siempre está acotada inferiormente, porque $x_1 \leq x_n$, $n \geq 1$. De forma similar, si $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ es monótona decreciente entonces está acotada superiormente (ejercicio).

Teorema 3.34. *Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona en $\mathbb{R}$. Entonces $(s_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ si y solo si es acotada.*

Demostración. Si suponemos que $(s_n)_{n\geq 1}$ es convergente en $\mathbb{R}$ entonces es una sucesión de Cauchy; y ya hemos probado que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Supongamos que $(s_n)_{n\geq 1}$ es monótona creciente y que está acotada. En este caso, existe $p \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tal que $s_n \in B_r(p) = (p-r, p+r)$, $n \geq 1$. Así, $s_n \leq p + r$ con $n \geq 1$ lo que muestra que $E = \{s_n : \ n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente. Sea $\alpha = \sup E$ y notemos que $s_n \leq \alpha$ para $n \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ entonces $\alpha - \epsilon < \alpha$ de forma que $\alpha - \epsilon$ no es cota superior de$E$: así, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\alpha - \epsilon < s_{n_0}$. Pero si $n \geq n_0$ entonces $\alpha - \epsilon < s_{n_0} \leq s_n \leq \alpha$, que muestra que $d(\alpha, s_n) < \varepsilon$, $n \geq n_0$. El caso de sucesiones monótonas decrecientes es similar (ejercicio). $\square$

Obs 3.35. Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona creciente y acotada superiormente en $\mathbb{R}$. Entonces la prueba anterior muestra que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge a $\sup\{s_n : \ n \geq 1\}$. De forma similar se verifica que si $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente en $\mathbb{R}$ entonces $(s_n)_{n\geq 1}$ converge a $\inf\{s_n : \ n \geq 1\}$ (ejercicio). $\triangle$

En lo que sigue desarrollamos las nociones de límite inferior y superior de sucesiones reales. Vamos a necesitar las siguientes nociones de convergencia hacia los infinitos

Definición 3.36. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en $\mathbb{R}$. Decimos que

1. $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $+\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq M$, $n \geq n_0$. En este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $-\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq M$, $n \geq n_0$. En este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

$\triangle$

Obs 3.37. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada superiormente si y solo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

De forma similar, $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada inferiormente si y solo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$. (ejercicios). $\triangle$

Obs 3.38. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona en $\mathbb{R}$. Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a algún punto en $\overline{\mathbb{R}}$: en efecto, si $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada, hemos probado que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene alguna subsucesión convergente. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ no está acotada, entonces la Observación 3.37 muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene alguna subsucesión que converge a p, donde $p - \infty$ ó $p = +\infty$. $\triangle$

La siguiente observación será de gran utilidad.

Obs 3.39. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in \overline{\mathbb{R}}$. Supongamos que $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ es tal que existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \leq \alpha$ para $n \geq n_0$. Entonces $p \leq \alpha$: para verificar esta afirmación, consideramos casos. Si suponemos que α, $p \in \mathbb{R}$ y $\alpha < p$, sea $\varepsilon = p - \alpha > 0$. Por hipótesis existe $n_1 \geq 1$ tal que $x_n \in B_\varepsilon(p) = (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$, si $n \geq n_1$. En particular, si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ entonces $x_n \leq \alpha$, $\alpha = p - \varepsilon < x_n$!! La contradicción anterior muestra que $p \leq \alpha$. Los demás casos son ejercicios! (tener en cuenta las convergencias hacia los infinitos cuando $p = -\infty$ ó $p = +\infty$).

De forma análoga se verifica que: si $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in \overline{\mathbb{R}}$ y existen $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ y $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \geq \alpha$ para $n \geq n_0$ entonces $p \geq \alpha$ (ejercicio). $\triangle$

Definición 3.40. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Sea

$$E = \{p \in \overline{\mathbb{R}} : \ \exists\, (x_{n_k})_{k\geq 1} \ , \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Entonces definimos:

- el límite inferior de $(x_n)_{n\geq 1}$ dado por: $\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf E \in \overline{\mathbb{R}}$.
- el límite superior de $(x_n)_{n\geq 1}$ dado por: $\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup E \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\triangle$

Obs 3.41. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Recordemos que si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ es no vacío entonces existen $\inf A$, $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$. Así, para verificar que los límite superior e inferior están bien definidos basta con verificar que $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (como en la definición anterior) satisface que $E \neq \emptyset$. Para esto, consideramos dos casos: si $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada entonces hemos probado que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Por otro lado, si $(x_n)_{n\geq 1}$ no está acotada entonces la Observación 3.37 muestra que $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge en $\overline{\mathbb{R}}$. Además se verifica por definición que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

$\triangle$

Ejemplo 3.42. Recordemos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito numerable. Así, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ es un conjunto infinito numerable. Sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}\cap[0,1]$ una función biyectiva; en este caso podemos definir la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ dada por $x_n=f(n)$, $n\geq 1$.

Si $p\in[0,1]$ y $r>0$ entonces $B_r(p)\cap(\mathbb{Q}\cap[0,1])$ es un conjunto infinito (verificar): entonces $\{n\geq 1:\ x_n\in B_r(p)\}$ es infinito; como $r>0$ es arbitrario concluimos que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=p$. Por otro lado, para cualquier subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a $q\in\overline{\mathbb{R}}$ se tiene que $0\leq x_{n_k}\leq 1$; en este caso hemos probado que $0\leq q\leq 1$.

De lo anterior vemos que

$$E=\{p\in\overline{\mathbb{R}}:\ \exists\,(x_{n_k})_{k\geq 1}\ ,\ \lim_{k\to\infty}x_{n_k}=p\}=[0,1]\,.$$

En este caso, $\limsup_{n\to\infty}x_n=1$ y $\liminf_{n\to\infty}x_n=0$. △

Obs 3.43. Sea $A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ no vacío. Definimos $-A=\{-x:\ x\in A\}\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ (en este caso seguimos la convención $-(-\infty)=+\infty$ y $-(+\infty)=-\infty$). Entonces se verifica que $\sup(-A)=-\inf A$ y $\inf(-A)=-\sup A$.

Por otro lado, si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$, podemos considerar la sucesión $(-x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ y se verifica: si

$$E=\{p\in\overline{\mathbb{R}}:\ \exists\,(x_{n_k})_{k\geq 1}\ ,\ \lim_{k\to\infty}x_{n_k}=p\}\subseteq\overline{\mathbb{R}}$$

$$F=\{q\in\overline{\mathbb{R}}:\ \exists\,(-x_{n_k})_{k\geq 1}\ ,\ \lim_{k\to\infty}-x_{n_k}=q\}\subseteq\overline{\mathbb{R}}$$

entonces $F=-E$. Las observaciones anteriores permiten verificar que

$$\liminf_{n\to\infty}(-x_n)=-\limsup_{n\to\infty}x_n\in\overline{\mathbb{R}}\quad\text{ y }\quad\limsup_{n\to\infty}(-x_n)=-\liminf_{n\to\infty}x_n\in\overline{\mathbb{R}}\,.$$

Todas las afirmaciones anteriores son un (largo pero sencillo) ejercicio. △

Teorema 3.44. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces*

LS1. Existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\limsup_{n\to\infty}x_n\in\overline{\mathbb{R}}$.

LS2. Si $\alpha>\limsup_{n\to\infty}x_n$ entonces existe $n_0\geq 1$ tal que $x_n<\alpha$, $n\geq n_0$.

De forma similar

LI1. Existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\liminf_{n\to\infty}x_n\in\overline{\mathbb{R}}$.

LI2. Si $\alpha<\liminf_{n\to\infty}x_n$ entonces existe $n_0\geq 1$ tal que $x_n>\alpha$, $n\geq n_0$.

Además, las propiedades LS1. y LS2. (respectivamente LI1. y LI2.) caracterizan a $\limsup_{n\to\infty}x_n$ (respectivamente $\liminf_{n\to\infty}x_n$) en $\overline{\mathbb{R}}$.

Demostración. Consideramos el conjunto

$$E=\{p\in\overline{\mathbb{R}}:\ \exists\,(x_{n_k})_{k\geq 1}\ ,\ \lim_{k\to\infty}x_{n_k}=p\}\subseteq\overline{\mathbb{R}}\,.$$

como en la Definición 3.40.

Probamos $LS2$: Sea $\alpha > \limsup_{n\to\infty} x_n$; si $\alpha = +\infty$ la propiedad $LS2$ se verifica trivialmente. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{R}$: en particular, $\limsup_{n\to+\infty} x_n < \infty$. Supongamos que $C = \{n \geq 1 : \ x_n \geq \alpha\}$ es conjunto infinito (numerable). En este caso podemos elegir elementos $n_k \in C$ tales que $n_k < n_{k+1}$ para $k \geq 1$ (ejercicio). Esta elección nos permite determinar una subsucesión $(y_k)_{k\geq 1} = (x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $y_k = x_{n_k} \geq \alpha$, $k \geq 1$ (porque $n_k \in C$, $k \geq 1$). Pero si aplicamos la Observación 3.41 a la sucesión $(y_k)_{k\geq 1}$, entonces existe una subsucesión $(y_{k_j})_{j\geq 1}$ tal que $\lim_{j\to\infty} y_{k_j} = q \in \overline{\mathbb{R}}$. Por la Observación 3.11 $(y_{k_j})_{j\geq 1}$ es subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ y luego $q \in E$ de forma que $q \leq \limsup_{n\to\infty} x_n < \infty$. Como $x_{n_k} \geq \alpha$, $k \geq 1$ entonces, por la Observación 3.39, concluimos que $q \geq \alpha$. Pero entonces $\alpha \leq q \leq \limsup_{n\to\infty} x_n < \alpha$!! Esta contradicción indica que $C = \{n \geq 1 : \ x_n \geq \alpha\}$ es conjunto finito y vale LS2.

Para probar LS1. consideramos los siguientes casos.

Caso 1: $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Supongamos que existen $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para $n \geq 1$. Sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión que converge a $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Notemos que vale que $x_{n_k} \leq M$ para $k \geq 1$. Por la Observación 3.39 concluimos que $p \leq M$: lo anterior muestra que M es cota superior de E y luego que $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq M$, en contra de nuestra hipótesis. Así, $(x_n)_{n\geq 1}$ no está acotada superiormente. La Observación 3.37 muestra que existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$.

Caso 2: $\ell = \limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\ell - \varepsilon$ no es cota superior de E, por lo que existe una función estrictamente creciente (y en particular inyectiva) $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que la subsucesión $(x_{f(k)})_{k\geq 1}$ es tal que $\ell \geq \lim_{k\to\infty} x_{f(k)} = e > \ell - \varepsilon$. Este último hecho muestra que $B = \{f(k) \geq 1 : \ x_{f(k)} > \ell - \varepsilon\}$ es conjunto infinito. Así, $B \subseteq C_\varepsilon := \{n \geq 1 : \ x_n > \ell - \varepsilon\}$ es conjunto infinito.

En particular, podemos elegir $n_1 \in C_1$; como $C_{1/2}$ es infinito, podemos elegir $n_1 < n_2 \in C_{1/2}$; de esta forma, si suponemos que hemos elegido $n_1 < \ldots < n_k$ con $n_j \in C_{1/j}$, $1 \leq j \leq k$ entonces (usando que $C_{1/(k+1)}$ es conjunto infinito) podemos elegir $n_k < n_{k+1} \in C_{1/(k+1)}$. De esta forma determinamos la subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que verifica: $x_{n_k} > \ell - 1/k$. Dado $\epsilon > 0$ entonces, por LS2., existe n_0 tal que $x_n < \ell + \epsilon$ para $n \geq n_0$. Además, existe $k_0 \geq 1$ tal que $1/k_0 < \epsilon$. Si $k \geq \max\{n_0, k_0\}$ entonces: $n_k \geq k \geq n_0$ garantiza que $x_{n_k} < \ell + \epsilon$; por otro lado, $1/k \leq 1/k_0 < \epsilon$ garantiza $x_{n_k} > \ell - 1/k > \ell - \epsilon$. De esta forma, para todo $k \geq \max\{n_0, k_0\}$ se tiene que $|x_{n_k} - \ell| < \varepsilon$; como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, vemos que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell$.

Caso 3: $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty = \sup E$. Como $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ es no vacío y tal que $\sup E = -\infty$, entonces $E = \{-\infty\}$ (ejercicio). En este caso, por construcción de E existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

Finalmente, supongamos que ℓ_1, $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ son tales que satisfacen LS1. y LS2. (así como $\limsup_{n\to\infty} x_n$). Supongamos que $\ell_1 < \ell_2$ y sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\ell_1 < r < \ell_2$. Por LS1. aplicado a ℓ_2, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell_2$. Por otro lado, por LS2. aplicado a ℓ_1, existe un $k_0 \geq 1$ tal que $x_{n_k} < r$ para todo $k \geq k_0$. Entonces $\ell_2 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq r < \ell_2$, que es un absurdo. Entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Las afirmaciones para el límite inferior se prueban de forma análoga (ejercicio). Otro método para probar éstas afirmaciones es usar la Observación 3.43. $\square$

Teorema 3.45. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$;*
2. *$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Notar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces $E = \{\ell\}$ (los detalles cuando $\ell = \pm\infty$ quedan como ejercicio).

Recíprocamente, si $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, consideramos casos. Si $\ell = +\infty$ entonces usando LI2, dado $M \in \mathbb{R}$ entonces $M < \ell$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ si $n \geq n_0$. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty = \ell$. Si $\ell \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces, usando LS2 y LI2, existen n_0, $n_1 \geq 1$ tales que $x_n < \ell + \varepsilon$ si $n \geq n_0$ y $\ell - \varepsilon < x_n$ si $n \geq n_1$. Así, si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ entonces $|\ell - x_n| < \varepsilon$. Lo anterior prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. Si $\ell = -\infty$ entonces se puede hacer un argumento similar al primer caso (ejercicio) y concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty = \ell$. □

Teorema 3.46. *Sean s_n, $t_n \in \mathbb{R}$ tales que $s_n \leq t_n$, $n \geq 1$. Entonces,*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n \qquad y \qquad \limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n \,.$$

Demostración. Si $\liminf_{n\to\infty} s_n = +\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (momento de reflexión!); como $s_n \leq t_n$, $n \geq 1$, entonces debemos tener que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ con lo que $\liminf_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Por otro lado, si $\liminf_{n\to\infty} t_n = -\infty$ entonces existe una subsucesión $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = -\infty$ que fuerza a que $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = -\infty$ (porque $s_{n_k} \leq t_{n_k}$ para $k \geq 1$) y en ese caso $\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty$, y el resultado vale.

Entonces podemos suponer que $\infty > \alpha = \liminf_{n\to\infty} s_n$ y que $\beta = \liminf_{n\to\infty} t_n > -\infty$. Supongamos que $\alpha > \beta$ y sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > r > \beta$. Entonces existe un n_0 tal que $s_n > r$ para $n \geq n_0$ (porque $r < \alpha$ y la propiedad LI2). Sea $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = \beta$; notemos que si $k \geq n_0$ entonces $n_k \geq k \geq n_0$ y $t_{n_k} \geq s_{n_k} > r$. Este último hecho implica que $\beta = \lim_{k\to\infty} t_{n_k} \geq r > \beta$. Esta contradicción muestra que debemos tener que $\alpha \leq \beta$. El caso de los límites superiores se verifica de forma similar (ejercicio). □

3.5 Series

Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Vamos a considerar la sucesión de sumas parciales $(s_N(a))_{N\geq 1}$ dada por

$$s_N(a) = s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \in \mathbb{C} \quad \text{para} \quad N \geq 1 \,.$$

Definición 3.47. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ si la sucesión $(s_N(a))_{N\geq 1}$ de sumas parciales converge en $\mathbb{C}$ dotado de la métrica usual. En este caso, notamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N(a) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \,.$$

Si la serie no converge, entonces decimos que la serie diverge. △

Teorema 3.48 (Criterio de Cauchy para series)**.** *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ si y solo si: para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \,.$$

Demostración. La serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ si y solo si la sucesión de sumas parciales $(s_N)_{N\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ con la métrica usual. Pero la sucesión $(s_N)_{N\geq 1}$ es de Cauchy si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si m, $n \geq n_0$ (y digamos que $m \geq n$)

$$\varepsilon > d(s_m, s_n) = |s_m - s_n| = |\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \,,$$

en donde hemos cancelado los términos comunes en las sumatorias del ante-último miembro de arriba. □

Corolario 3.49. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Si la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Por el resultado anterior, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$. Si $n \geq n_0$ y tomamos $m = n+1$ entonces $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |a_{n+1}| < \varepsilon$. Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Obs 3.50. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Recordemos que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no garantiza que la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$. △

Proposición 3.51. *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$, $b = (b_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{C}$ tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{C}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \in \mathbb{C}$. Si $\gamma \in \mathbb{C}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma a_n + b_n) = \gamma\,\alpha + \beta$ ó dicho de otra forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma a_n + b_n) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(es decir, converge al valor indicado).

Demostración. Ejercicio (usar la definición de convergencia de series y las propiedades de los límites de sucesiones en $\mathbb{C}$ vistas antes). □

Teorema 3.52. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos no negativos ($a_n \geq 0$, $n \geq 1$). Entonces la serie de los a_n's converge en $\mathbb{C}$ (a un valor en $\mathbb{R}_{\geq 0}$) si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente. En este caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_N(a) :\ N \geq 1\} \,.$$

Demostración. Notemos que si $1 \leq N \leq M$ entonces

$$s_M - s_N = \sum_{n=1}^{M} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=N+1}^{M} a_n \geq 0 \implies 0 \leq s_N \leq s_M \,.$$

Así, la sucesión de sumas parciales es monótona creciente en $\mathbb{R}_{\geq 0}$. En este caso, hemos probado que la sucesión $(s_N)_{N\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ (ó equivalentemente en $\mathbb{C}$, porque $\mathbb{R}$ es un subespacio métrico *cerrado* de $\mathbb{C}$) si y solo si está acotada superiormente. Más aún, si la serie converge entonces hemos probado la identidad para calcular el límite (ver los resultados sobre sucesiones monótonas crecientes!) □

Teorema 3.53 (Criterio de comparación)**.** *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ y $(c_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{C}$.*

1. *Si* $|a_n| \leq c_n$, $n \geq 1$ *y la serie de los* c_n*'s converge entonces la serie de los* a_n*'s converge.*

2. *Si* $0 \leq b_n \leq a_n$ *y la serie de los* b_n*'s diverge entonces la serie de los* a_n*'s diverge.*

Demostración. 1. Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $m \geq n \geq n_0$,

$$| \sum_{k=n+1}^{m} c_k| = \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon\,.$$

Entonces, si $m \geq n \geq n_0$ se tiene que

$$| \sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon\,.$$

Lo anterior muestra que la sucesión de sumas parciales de los a_n's es de Cauchy.

2. Si suponemos que la la serie de los a_n's converge entonces, por el ítem anterior, concluimos que la serie de los b_n's converge, en contra de la hipótesis. En conclusión, la serie de los a_n's diverge. □

Lema 3.54. *Sea* $x \in \mathbb{C}$. *Entonces*

1. *Si* $|x| < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$*;*

2. *Si* $|x| > 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} |x^n| = +\infty$*.*

Demostración. 1. Si $|x| < 1$ entonces existe $p > 0$ tal que $|x| = 1/(p+1)$. Como $p > 0$ entonces (usando el binomio de Newton y notando que los términos de la fórmula son todos positivos)

$$(p+1)^n \geq \binom{n}{1} p \cdot 1^{n-1} = n\,p\,, \quad n \geq 1\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \geq 1$ tal que $0 < 1/n_0 < p \cdot \varepsilon$; si $n \geq n_0$ entonces

$$|x|^n = (\frac{1}{(p+1)})^n \leq \frac{1}{(p\,n)} \leq \frac{1}{n_0}\,\frac{1}{p} < (p \cdot \varepsilon)\,\frac{1}{p} = \varepsilon\,.$$

2. Si $|x| > 1$ entonces existe $p > 0$ tal que $|x| = p + 1$. Entonces $|x|^n = (1 + p)^n \geq n\,p$. Si $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sea $n_0 \geq 1$ tal que $n_0 \geq M/p$. Si $n \geq n_0$ entonces $|x|^n \geq n\,p \geq n_0\,p \geq M$. □

Teorema 3.55. *Sea* $x \in \mathbb{C}$. *Entonces*

1. *Si* $|x| < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *converge y* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$*.*

2. *Si* $|x| \geq 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *diverge.*

Demostración. Si $x \neq 1$ entonces (verificar)

$$(1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1} \implies s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,.$$

Usando el ítem 1. del lema anterior, junto con propiedades de límites para sumas y cocientes en $\mathbb{C}$, vemos que si $|x| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = (1-x)^{-1}$.

Por otro lado, si $|x| \geq 1$ entonces el término general de la serie, que es x^n, no converge a 0 (notar que $|x^n| = |x|^n \geq 1$). □

Teorema 3.56. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monótona decreciente ($0 \leq a_{n+1} \leq a_n$, $n \geq 1$). Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la serie $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j\ a_{2^j}$ converge.*

Demostración. Como se trata de series de términos no negativos, las series convergen si y solo si las sucesiones de sumas parciales están acotadas superiormente. Consideremos las sumas parciales

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{y} \quad t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j\ a_{2^j} \quad \text{para} \quad k,\, n \geq 1\,.$$

Sea $n \geq 1$; sea $k \geq 1$ tal que $n \leq 2^{k+1} - 1$: en este caso

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq \sum_{j=1}^{2^{k+1}-1} a_j = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j$$

la segunda igualdad se obtiene de haber asociado (de forma conveniente) los términos de la segunda sumatoria: notemos que la segunda sumatoria es sobre el conjunto de índices $A = \{1, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$. Podemos escribir a este conjunto de índices como $A = \cup_{\ell=0}^{k} A_\ell$, donde $A_\ell = \{h \,:\, 2^\ell \leq h \leq 2^{\ell+1} - 1\}$, $0 \leq \ell \leq k$: pero notemos que $A_\ell \cap A_{\ell'} = \emptyset$ si $\ell \neq \ell'$. Entonces sumar sobre los índices de A es lo mismo que sumar (parcialmente) primero sobre los índices de cada A_ℓ, y después sumar todas esas sumas (parciales) porque sumamos todos los términos sin repetir ninguno!

Por hipótesis, $a_{2^\ell} \geq a_j$, $2^\ell \leq j \leq 2^{\ell+1} - 1$ y entonces

$$\sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \leq 2^\ell\, a_{2\ell}$$

porque la sumatoria tiene 2^ℓ términos. Las desigualdades anteriores muestran que

$$s_n \leq \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \leq \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell\, a_{2\ell} = t_k\,.$$

Por otro lado, dado $k \geq 1$ sea $n \geq 1$ tal que $n > 2^k - 1$: notemos que si $\ell \geq 0$ entonces

$$a_{2^{\ell+1}} \leq \frac{1}{2^\ell} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \implies 2^{\ell+1} a_{2^{\ell+1}} \leq 2 \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j$$

porque como cada $a_{2^{\ell+1}} \leq a_j$ para $2^\ell \leq j \leq 2^{\ell+1} - 1$, entonces el *promedio* de estos a_j's supera a $a_{2^{\ell+1}}$. Entonces

$$\begin{aligned} t_k &= \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell\ a_{2^\ell} = a_1 + 2\,a_2 + \sum_{\ell=1}^{k-1} 2^{\ell+1}\ a_{2^{\ell+1}} \leq 2a_1 + 2\,a_2 + 2\sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j \\ &= 2\,a_2 + 2\sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} a_j = 2a_2 + 2\sum_{j=1}^{2^k-1} a_j \leq 2a_2 + 2s_n\,. \end{aligned}$$

Notemos que las dos estimaciones anteriores muestran que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ está acotada si y solo si la sucesión $(t_k)_{k\geq 1}$ está acotada. $\square$

Teorema 3.57. *La serie* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ *converge si* $p > 1$ *y diverge si* $p \leq 1$.

Demostración. Recordemos que $n^p = e^{p \ln n}$, con lo que $1/n^p = e^{-p \ln n}$, $n \geq 1$. En particular, si $p < 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} 1/n^p = +\infty$, que muestra que la serie diverge. Si $p = 0$ la serie claramente diverge. Supongamos que $p > 0$: en este caso, $(1/n^p)_{n\geq 1}$ es una sucesión monótona decreciente de términos positivos y podemos aplicar el criterio del resultado anterior: En este caso, tomando $n = 2^k$ entonces $2^k a_{2^k} = 2^k/(2^k)^p = 2^{k(1-p)}$, $k \geq 0$. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge si y solo si} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k \quad \text{converge}\,.$$

Notemos que $0 < 2^{1-p} < 1$ si $p > 1$ mientras que $2^{1-p} \geq 1$ si $0 < p \leq 1$. Las observaciones anteriores junto con el Teorema 3.55 (sobre la convergencia de las series geométricas) muestran que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$. □

En lo que sigue vamos a formalizar los criterios de la raíz y de la razón para la convergencia de series.

Teorema 3.58 (Criterio de la raíz)**.** *Sea* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión en* $\mathbb{C}$ *y sea*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \geq 0\,.$$

1. *Si* $\alpha < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
2. *Si* $\alpha > 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
3. *Si* $\alpha = 1$ *entonces el criterio no da información sobre la serie.*

Demostración. Supongamos que $\alpha < 1$ y sea $\alpha < \beta < 1$. Por las propiedades del límite superior, existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, $|a_n|^{1/n} < \beta$, con lo que $|a_n| < \beta^n$. Como $0 < \beta < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ converge. Por el criterio de comparación concluimos que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge. Pero entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge (ejercicio).

Supongamos que $\alpha > 1$: entonces existe una subsucesión $(|a_{n_k}|^{1/n_k})_{k\geq 1}$ que converge a α. En este caso, existe un $k_0 \geq 1$ tal que $|\alpha - |a_{n_k}|^{1/n_k}| < \alpha - 1$ que muestra que $1 \leq |a_{n_k}|^{1/n_k}$ (ejercicio). Pero en este caso, $1 \leq |a_{n_k}|$, para $k \geq k_0$. De esta forma, el límite de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no es cero (porque hemos hallado una subsucesión que no converge a 0). Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

Para finalizar damos ejemplos de dos series para las cuales $\alpha = 1$, pero una converge y la otra diverge! El primer ejemplo es $\sum_{n\geq 1} 1/n$: por el resultado anterior esta serie diverge. Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} (1/n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1\,.$$

En efecto, como $0 < (1/n)^{1/n} < 1$ entonces existe $0 < x_n$ tal que $(1/n)^{1/n} = 1/(1 + x_n)$. En este caso, $x_n = n^{1/n} - 1$ y luego (usando el binomio de Newton)

$$n = (x_n + 1)^n \geq x_n^2 n(n-1)/2\,.$$

Lo anterior muestra que $0 < x_n \leq 2/(n-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Así, $(1/n)^{1/n} = 1/(1 + x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Por otra parte, la serie $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge (por el resultado anterior) y verifica que

$$|1/n^2|^{1/n} = (1/n)^{1/n}\,(1/n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \cdot 1 = 1$$

Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} (1/n)^{1/n} = 1 \implies 1 = 1/1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} \,.$$

Esto lo mencionamos porque lo vamos a usar más adelante. □

Teorema 3.59 (Criterio de la razón)**.** *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, y sea*

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \,.$$

1. *Si $\gamma < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
2. *Si existe $n_0 \geq 1$ tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, $n \geq n_0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Demostración. Supongamos que $\gamma < 1$ y sea $\gamma < \beta < 1$. Entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \beta$. En particular

$$|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}| < \beta \implies |a_{n_0+1}| < \beta |a_{n_0}| \,.$$

Si suponemos que $k \geq 1$ satisface $|a_{n_0+k}| < \beta^k |a_{n_0}|$ (lo anterior dice que esto vale para $k = 1$) entonces

$$|\frac{a_{n_0+(k+1)}}{a_{n_0+k}}| < \beta \implies |a_{n_0+(k+1)}| < \beta |a_{n_0+k}| < \beta\, \beta^k |a_{n_0}| = \beta^{k+1} |a_{n_0}| \,.$$

Por inducción la desigualdad vale para todo $k \geq 1$. Como $0 < \beta < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n_0}|\, \beta^n$ converge. Por el criterio de comparación concluimos que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge; entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Supongamos que existe $n_0 \geq 1$ tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, $n \geq n_0$. Con un argumento similar al hecho en la primera parte de la prueba concluimos que en este caso,

$$|a_{n_0+k}| \geq |a_{n_0}| > 0 \quad \text{para todo} \quad k \geq 1 \,.$$

Lo anterior muestra que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no converge a cero, y la serie no converge. □

Ejemplo 3.60. El criterio de la raíz puede ser más útil al momento de determinar la convergencia de series. Consideramos el siguiente ejemplo: sea $(a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión determinada por los siguientes casos: si n es impar entonces $a_n = 2^{-(n+1)/2}$ y si n es par, entonces $a_n = 3^{-n/2}$. En este caso la sucesión es

$$1/2 \,,\; 1/3 \,,\; 1/2^2 \,,\; 1/3^2 \,,\; 1/2^3 \,,\; 1/3^3 \,,\; \ldots$$

Después de alguna reflexión, podemos ver que

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{(n+1)}{2n+1}}} = \frac{1}{2^{1/2}} < 1 \,.$$

El criterio de la raíz indica que la serie converge. Si ahora aplicamos el criterio de la razón, notamos que (después de reflexionar un rato...)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\, (\frac{3}{2})^n = +\infty \,.$$

△

En particular, el caso anterior muestra que el criterio de la razón no da información si el límite superior de los cocientes es mayor ó igual que uno.

Teorema 3.61. *Sea $(c_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \qquad y \qquad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \geq \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \geq 0\,.$$

Demostración. Vamos a probar la segunda desigualdad (notemos que esta desigualdad dice que siempre que el criterio de la razón determina la convergencia de la serie entonces el criterio de la raíz también lo hace). Sea $\alpha = \limsup_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}|$. Si $\alpha = +\infty$ (como en el ejemplo anterior) entonces no hay nada que probar. En otro caso, $\alpha \in \mathbb{R}$ (y $\alpha \geq 0$). Sea $\beta > \alpha$ y sea $n_0 \geq 1$ tal que $|\frac{c_{n+1}}{c_n}| < \beta$ para todo $n \geq n_0$. Si $n > n_0$ entonces $n = n_0 + p$ con $p \geq 1$. Notemos que

$$|\frac{c_{n_0+1}}{c_{n_0}}| < \beta \implies |c_{n_0+1}| < \beta\,|c_{n_0}|$$

y si suponemos que $|c_{n_0+k}| < \beta^k\,|c_{n_0}|$ con $1 \leq k < p$ (lo anterior dice que vale con $k = 1$) entonces

$$|\frac{c_{n_0+k+1}}{c_{n_0+k}}| < \beta \implies |c_{n_0+k+1}| < \beta\,|c_{n_0+k}| < \beta^{k+1}\,|c_{n_0}|$$

Entonces, en particular, $|c_n| = |c_{n_0+p}| < \beta^p|c_{n_0}| = \beta^{n-n_0}|c_{n_0}| = \beta^n\frac{|c_{n_0}|}{\beta^{n_0}}$, con $n > n_0$. Así, vemos que

$$|c_n|^{1/n} \leq \beta\,(\frac{|c_{n_0}|}{\beta^{n_0}})^{1/n} \qquad \text{para} \qquad n > n_0\,.$$

Sea $n_1 \geq \max\{n_0\,,\,\frac{|c_{n_0}|}{\beta^{n_0}}\}$: si $n \geq n_1$ entonces

$$|c_n|^{1/n} \leq \beta\,(\frac{|c_{n_0}|}{\beta^{n_0}})^{1/n} \leq \beta\;(n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta\,.$$

Así, $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \beta\, n^{1/n} = \beta$ (donde usamos que existe $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$). Como $\beta > \gamma$ era arbitrario, vemos que $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \gamma$. □

En lo que sigue formalizamos algunos hechos relacionados con series de potencias (con coeficientes complejos, y en donde dejamos que la variable varía en $\mathbb{C}$).

Definición 3.62. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. La serie de potencias compleja con coeficientes $(a_n)_{n\geq 0}$ es la expresión (formal!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,.$$

En este contexto, z es considerada una indeterminada (ó variable). △

El problema asociado a una serie de potencias es el de determinar el dominio natural de la serie: es decir, el conjunto de números complejos $w \in \mathbb{C}$ para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n$ converge en $\mathbb{C}$. En el contexto de series de potencias es útil considerar el siguiente criterio de convergencia fuerte.

Definición 3.63. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. △

Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Entonces, usando el criterio de comparación (de forma trivial: $|a_n| \leq |a_n|$) concluimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge en $\mathbb{C}$ (convergencia absoluta implica convergencia!).

Por otro lado si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, pero no converge absolutamente, entonces decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge *condicionalmente.*

Teorema 3.64. *Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \geq 0$. Definimos el radio de convergencia de la serie, notado R, dado por*

$$R = \begin{cases} 0 & si \ \ \alpha = +\infty; \\ \frac{1}{\alpha} & si \ \ 0 < \alpha < +\infty; \\ +\infty & si \ \ \alpha = 0. \end{cases}$$

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, w^n$ converge absolutamente para $|w| < R$ mientras que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, w^n$ diverge si $|w| > R$.

Demostración. Sea $w \in \mathbb{C}$ y apliquemos el criterio de la raíz a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n w^n|$: en este caso consideramos $|a_n w^n|^{1/n} = |a_n|^{1/2} |w|$; así

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n w^n|^{1/n} = |w| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = |w| \, \alpha \, .$$

Entonces $|w| \, \alpha < 1$ si y solo si $|w| < R$ y en este caso la serie converge absolutamente. Por otro lado, si aplicamos el criterio de la raíz para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ vemos que $|w| \, \alpha > 1$ si y solo si $|w| > R$ y en este caso la serie diverge. □

Proposición 3.65 (Criterio de Leibnitz para series alternantes)**.** *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que*

1. $|a_n| \geq |a_{n+1}|$, $n \geq 1$.

2. $a_{2n-1} \geq 0$ *y* $a_{2n} \leq 0$ *para* $n \geq 1$.

3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea n_0 tal que $|a_n| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Sean $M \geq N \geq n_0$ y consideramos $\sum_{n=N+1}^{M} a_n$, según los casos:

Por ejemplo, si $M - N = 2r + 1$ es impar y $N = 2k$ es par: entonces $a_{N+1} \geq 0$ y $-a_{2n} \geq a_{2n+1}$ implica que $0 \geq a_{2n} + a_{2n+1}$, $n = k+1, ..., k+r$. Así,

$$\sum_{n=N+1}^{M} a_n = a_{N+1} + \sum_{n=k+1}^{k+r} (a_{2n} + a_{2n+1}) \leq a_{N+1} < \varepsilon \, .$$

De forma similar, $a_{2n+1} + a_{2(n+1)} \geq 0$ y $a_M = a_{2(k+r)+1} \geq 0$. Así

$$\sum_{n=N+1}^{M} a_n = \sum_{n=k}^{k+r-1} (a_{2n+1} + a_{2(n+1)}) + a_M \geq 0 \, ,$$

donde hemos usado que el último término así como la sumatoria son no negativos. En este caso hemos probado que

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{M} a_n < \varepsilon \implies |\sum_{n=N+1}^{M} a_n| < \varepsilon \,.$$

Los (muchos!) demás casos se tratan de forma similar (ejercicio). Por el criterio de Cauchy la serie es convergente. □

Ejemplo 3.66. Consideramos la sucesión $((-1)^n \frac{1}{n})_{n\geq 1}$. El criterio de Leibnitz muestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ converge. Pero ya hemos visto que la serie no converge absolutamente. En este caso decimos que la serie converge condicionalmente. □

En algunos casos, uno se ve tentado de reordenar los términos de una sucesión para tratar de calcular la serie correspondiente. Sin embargo, como vemos a continuación, esto puede cambiar el valor de la serie de forma drástica cuando la serie es condicionalmente convergente.

Definición 3.67. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una biyección. Definimos la sucesión reordenada $(a'_n)_{n\geq 1}$ dada por $a'_n = a_{\phi(n)}$, $n \geq 1$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ es un reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (siempre que las series converjan). △

Teorema 3.68. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente. Si $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ entonces existe un reordenamiento $(a'_n)_{n\geq 1}$ con sumas parciales $s'_N = \sum_{n=1}^{N} a'_n$, $N \geq 1$, tal que*

$$\liminf_{N\to\infty} s'_N = \alpha \quad \text{y} \quad \limsup_{N\to\infty} s'_N = \beta \,.$$

Demostración. Notemos que como la serie converge, entonces sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \,.$$

Para $n \geq 1$ definimos $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ y $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. Notemos que $p_n = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $p_n = 0$ si $a_n < 0$ (a veces notamos $p_n = (a_n)^+$ la parte positiva de a_n). De forma similar, $q_n = -a_n$ si $a_n < 0$ y $q_n = 0$ si $a_n \geq 0$ (y notamos $q_n = (a_n)^-$ la parte negativa). Con las definiciones anteriores, tenemos que

$$p_n,\, q_n \geq 0 \,,\; a_n = p_n - q_n \,,\; |a_n| = p_n + q_n \quad \text{para} \quad n \geq 1 \,.$$

En este caso las series $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ son (ambas) divergentes. En efecto, si las dos fueran convergentes, entonces (ver Proposición 3.51) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n + q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sería convergente, en contra de la hipótesis. Así, alguna debe ser divergente: si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ es divergente, pero $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ es convergente, entonces es sencillo verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - q_n)$ es divergente; pero esta última serie coincide con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que es convergente (y un argumento análogo vale cuando asumimos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ es divergente).

En conclusión: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ son (ambas) divergentes. Como se trata de series de términos no negativos, la divergencia equivale a que la sucesión de sumas parciales no está acotada superiormente. Definimos la sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{N}^*$ de la siguiente forma: $n_1 = \min\{n \geq 1 : \; a_n \geq 0\}$; asumiendo que definimos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$

entonces definimos $n_{k+1} = \min\{n \geq n_k + 1 : \ a_n \geq 0\} > n_k$. Notemos que con esta defnción, se tiene que si $a_n \geq 0$ entonces existe $k \geq 1$ tal que $n = n_k$.

De forma similar definimos la sucesión estrictamente creciente $(m_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{N}^*$ con la siguiente propiedad: si $a_n < 0$ entonces existe $k \geq 1$ tal que $n = m_k$. Notemos que en este caso

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_k = \sum_{k=1}^{j} a_{n_k} \quad \text{y} \quad -\sum_{k=1}^{m_j} q_k = \sum_{k=1}^{j} a_{m_k} \quad \text{para} \quad j \geq 1\,.$$

(verificar lo anterior con cuidado: hacer algunos ejemplos para darse cuenta porqué valen las identidades!!) El hecho de que las series de los p's y los q's sean divergentes nos permite garantizar que: para todo $j_0 \geq 1$ vale que

$$\sum_{k=j_0}^{j} a_{n_k} \xrightarrow[j\to\infty]{} +\infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=j_0}^{j} a_{m_k} \xrightarrow[j\to\infty]{} -\infty\,.$$

Sean $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$: consideramos sucesiones $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ tales que

1. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ en $\mathbb{R}$.
2. $\alpha_n < \beta_n, \beta_{n+1}$, $n \geq 1$.
3. $\beta_1 > 0$.

Notemos que siempre podemos constuir sucesiones con estas condiciones (ejercicio: plantear estrategias para obtener las sucesiones de los α's y β's).

Sea $r_1 \geq 1$ el natural $r \in \mathbb{N}^*$ más chico tal que

$$x_1 = \sum_{k=1}^{r} a_{n_k} > \beta_1 \ (> \alpha_1)\,.$$

Notemos que r_1 está bien definido, por las condiciones anteriores. Sea $s_1 \geq 1$ el natural $s \in \mathbb{N}^*$ más chico tal que

$$y_1 = x_1 + \sum_{k=1}^{s} a_{m_k} = \sum_{k=1}^{r_1} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s} a_{m_k} < \alpha_1$$

Entonces s_1 está bien definido (porque $\alpha_1 < \beta_1$ de forma que hay que sumar términos negativos para ir desde arriba de β_1 hasta debajo de α_1!) y

$$y_1 = \sum_{k=1}^{r_1} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_1} a_{m_k} < \alpha_1\,.$$

Continuamos con este proceso: asumiendo que hemos definido $1 \leq r_1 < \ldots < r_j$ y $1 \leq s_1 < \ldots < s_j$ tales que si $0 \leq \ell \leq j-1$ (donde convenimos en definir $s_0 = 0$):

$$\sum_{k=1}^{r_{\ell+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_\ell} a_{m_k} > \beta_{\ell+1} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{r_{\ell+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{\ell+1}} a_{m_k} < \alpha_{\ell+1}$$

entonces partiendo de la segunda desigualdad anterior con $\ell = j-1$ podemos definir r_{j+1} como el natural $r \geq r_j + 1$ más chico tal que

$$\sum_{k=1}^{r} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} > \beta_{j+1} \implies \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} > \beta_{j+1} \tag{2}$$

Como $\alpha_j < \beta_{j+1}$ entonces $r_{j+1} > r_j$ y está bien definido. Partiendo de la desigualdad anterior podemos definir s_{j+1} como el natural $s \geq s_j + 1$ más chico tal que

$$\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s} a_{m_k} < \alpha_{j+1} \implies \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} < \alpha_{j+1} \tag{3}$$

De esta forma $s_{j+1} < s_j$ está bien definido porque $\alpha_{j+1} < \beta_{j+1}$. Así quedan definidas las sucesiones $(r_j)_{j\geq 1}$ y $(s_j)_{j\geq 1}$.

Notemos que por definición de $r_{j+1} \geq r_j + 1$ (es el mínimo que satisface cierta desigualdad, de forma que índices anteriores no puede satisfacer la misma desigualdad!),

$$\sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=r_j+1}^{r} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \beta_{j+1} \quad \text{para} \quad r_j + 1 \leq r \leq r_{j+1} - 1\,. \tag{4}$$

En particular, tomando $r = r_{j+1} - 1$ arriba,

$$\sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}-1} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} = \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} - a_{n_{r_{j+1}}} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \beta_{j+1} \tag{5}$$

Este hecho junto con la desigualdad en Eq. (2) muestan que

$$|\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} - \beta_{j+1}| \leq a_{n_{r_{j+1}}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{6}$$

De forma análoga, por la definición de s_{j+1}

$$\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} + \sum_{k=s_j+1}^{s} a_{m_k} \geq \alpha_{j+1} \quad \text{para} \quad s_j + 1 \leq s \leq s_{j+1} - 1\,. \tag{7}$$

En particular, tomando $s = s_{j+1} - 1$ entonces (argumentando como antes):

$$\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} - a_{m_{s_{j+1}}} \geq \alpha_{j+1} \implies \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} \geq \alpha_{j+1} + a_{m_{s_{j+1}}} \tag{8}$$

Usando este hecho y la desigualdad Eq. (3) vemos que

$$|\sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_{j+1}} a_{m_k} - \alpha_{j+1}| \leq a_{m_{s_{j+1}}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{9}$$

Definimos la biyección $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ como sigue: definimos $r_0 = 0$ (recordemos $s_0 = 0$) y si $h \in \mathbb{N}^*$ entonces se pueden dar dos casos:

Caso 1: existe $j \geq 0$ tal que $r_j + s_j + 1 \leq h \leq r_{j+1} + s_j$ y definimos $\phi(h) = n_{h-s_j}$.

Caso 2: existe $j \geq 0$ tal que $r_{j+1} + s_j + 1 \leq h \leq r_{j+1} + s_{j+1}$ y definimos $\phi(h) = m_{h-r_{j+1}}$.

De esta forma ϕ resulta una biyección (ejercicio).

Se verifica por inducción que: dado $h \in \mathbb{N}^*$ entonces

Si vale el caso 1: entonces

$$\{\phi(1), \ldots, \phi(h)\} = \{n_k : \ 1 \leq k \leq h - s_j\} \cup \{m_k : \ 1 \leq k \leq s_j\}$$

(ejercicio!). En este caso, usando la Eqs. (8) (primero) y (4), (5) (después)

$$\alpha_j + a_{m_{s_j}} \leq \sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \sum_{n=1}^{h} a_{\phi(n)} = \sum_{k=1}^{r_j} a_{n_k} + \sum_{k=r_j+1}^{h-s_j} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \leq \beta_{j+1} + a_{n_{r_{j+1}}} \quad (10)$$

Si vale el caso 2: entonces

$$\{\phi(1), \ldots, \phi(h)\} = \{n_k : \ 1 \leq k \leq r_{j+1}\} \cup \{m_k : \ 1 \leq k \leq h - r_{j+1}\}$$

(ejercicio!). En este caso, usando la Eqs. (5) (primero) y (7), (8) (después)

$$\beta_{j+1} + a_{n_{r_{j+1}}} \geq \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{s_j} a_{m_k} \geq \sum_{n=1}^{h} a_{\phi(n)} = \sum_{k=1}^{r_{j+1}} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{h-r_{j+1}} a_{m_k} \geq \alpha_{j+1} + a_{m_{s_{j+1}}} \quad (11)$$

Usando que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ en $\mathbb{R}$, entonces las Eqs. (10) y (11) muestran que las sumas parciales de este reordenamiento verifican

$$\liminf_{n\to\infty} s'_N \geq \alpha \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} s'_N \leq \beta\,,$$

donde esta última verificación es un ejercicio elaborado. Más aún, eligiendo $h_1 = r_{j+1} + s_j$ y $h_2 = r_{j+1} + s_{j+1}$, los hechos anteriores junto con las Eqs. (6) y (9) muestran que

$$|s'_{h_1} - \beta_{j+1}| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \text{y} \quad |s'_{h_2} - \alpha_{j+1}| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

de forma que

$$\liminf_{n\to\infty} s'_N = \alpha \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} s'_N = \beta\,.$$

□

Teorema 3.69. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ que converge absolutamente y sea $\sum_{n\geq 1} a_n = \ell$. Si $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ es una biyección entonces la serie asociada a este reordenamiento converge y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$: por hipótesis, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $M \geq N \geq n_0$ entonces $\sum_{n=N+1}^{m} |a_n| < \varepsilon/4$. Sea $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una biyección: sea $p_0 = \max\{\phi^{-1}(1), \ldots, \phi^{-1}(n_0)\} \geq n_0$: así, si $1 \leq n \leq n_0$ existe $1 \leq h \leq p_0$ tal que $\phi(h) = n$. Entonces $\{1, \ldots, n_0\} \subseteq \{\phi(1), \ldots, \phi(p_0)\}$. Si $N \geq p_0$ entonces los términos de la forma a_n, $1 \leq n \leq n_0$ aparecen en las dos sumas parciales

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{y} \quad s'_N = \sum_{n=1}^{N} a_{\phi(n)} \implies |s_N - s'_N| \leq 2 \sum_{n=n_0+1}^{M} |a_n| < \varepsilon/2\,.$$

donde $M = \max\{p_0, \phi(1), \dots, \phi(p_0)\}$ (verificar: ejercicio!). Por otro lado, sea $n_1 \geq 1$ tal que $|s_N - \ell| < \varepsilon/2$ si $N \geq n_1$: si $N \geq \max\{p_0, n_1\}$ entonces

$$|s'_N - \ell| \leq |s'_N - s_N| + |s_N - \ell| < \epsilon\,.$$

$\square$

Corolario 3.70. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ con la siguiente propiedad: existe $\ell \in \mathbb{C}$ tal que para toda biyección $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$ (converge a ℓ en $\mathbb{C}$). Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*

Demostración. Ejercicio (Sugerencia: notar que si la serie no converge absolutamente, entonces o bien la serie de la sucesión de partes reales $(\Re(a_n))_{n\geq 1}$ ó bien la serie de la sucesión de partes imaginarias $(\Im(a_n))_{n\geq 1}$ no converge absolutamente. Como ambas series convergen, en este caso se puede aplicar el resultado sobre reordenamientos de series reales condicionalmente convergentes a alguna de ellas). $\square$

Para finalizar este capítulo, mencionamos que una serie que verifica que existe $\ell \in \mathbb{C}$ tal que para toda biyección $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \ell$ se dice *incondicionalmente convergente*. Si miramos los enunciados los dos último resultados, veremos que en el caso de series en $\mathbb{C}$, convergencia absoluta equivale a convergencia incondicional (pero en espacios normados de dimensión infinita esta equivalencia no vale en general!).

3.6 Ejercicios

Ejercicio 40. Para cada una de las siguientes sucesiones $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}$, indicar si son de Cauchy y, en los casos afirmativos, hallar el número real al que convergen.

a) $x_n = \frac{1}{n}$.

b) $x_n = \frac{n^2}{1+n^2}$.

c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

d) $x_n = \frac{n^3}{n^2+1}$.

e) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

f) $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!}, \quad r \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 41. Verificar las siguientes afirmaciones:

a) Si $p > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

b) Si $p > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

d) Si $p > 0$ y α es un número real entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

e) Si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Sugerencia: Si $0 \leq x_n \leq s_n$ para $n \geq N$, donde N es un número fijo y si $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ejercicio 42. De las siguientes sucesiones, algunas son subsucesiones de otras; determinarlo. Hallar los límites subsecuenciales y determinar cuáles sucesiones convergen.

a) $1, -1, 1, -1, \ldots$

b) $1, 1, -1, 1, 1, -1, \ldots$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

d) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

e) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$

Ejercicio 43. Si $s_1 = 2$ y

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}},$$

probar que $\{s_n\}$ converge y que $s_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 44. Hallar el límite inferior y superior de las siguientes sucesiones, y determinar si alguna de las sucesiones convergen.

a) $x_n = sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

b) $x_n = \frac{1}{n} cos\,(n\pi)$.

c) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) cos\,(n\pi)$.

Ejercicio 45. Hallar el límite superior e inferior de la sucesión $\{s_n\}$ definida por

$$s_1 = 0; \qquad s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}; \qquad s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}.$$

Ejercicio 46. Probar que si $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente en $\mathbb{R}$ entonces $(s_n)_{n\geq 1}$ converge a $\inf\{s_n : \ n \geq 1\}$.

Ejercicio 47. Probar que si $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in \mathbb{R}$ y existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \geq \alpha$ para $n \geq n_0$ entonces $p \geq \alpha$

Ejercicio 48. Probar que $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada inferiormente si y solo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

Ejercicio 49. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona en $\mathbb{R}$. Probar que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a algún punto en $\overline{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 50. Probar las siguientes igualdades:

$$\liminf_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ejercicio 51. Supongamos que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d), y que alguna subsucesión converge a un punto p. Probar que toda la sucesión converge a p.

Ejercicio 52. Supongamos que $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Probar que la sucesión

$$\{d(p_n, q_n)\}$$

converge.

Sugerencia: para todo m, n,

$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n);$$

Esto implica que

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

es chico para n, m suficientemente grandes.

Ejercicio 53. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión en un espacio métrico (X, d) que satisface la siguiente condición: para todo $p \in \mathbb{N}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

¿Es necesariamente $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy? Justificar.

Ejercicio 54.

a) Supongamos que (X, d) es un espacio métrico completo y sea $\{p_n\}$ una sucesión en X. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(p_n, p_{n+1}),$$

converge. Probar que $\{p_n\}$ converge.

b) Supongamos que $\{p_n\}$ es una sucesión en un espacio métrico X que converge a un punto p. Demostrar que

$$d(p_1, p) \leq \sum_{n=1}^{\infty} d(p_n, p_{n+1}).$$

Observar que la afirmación es verdadera incluso en el caso que la serie (de términos no negativos) sea divergente.

Sugerencia (inciso b): Probar que

$$d(p_1, p) = \lim_{n \to \infty} d(p_1, p_n).$$

Ejercicio 55. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en (E, d) espacio métrico completo tal que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq r d(x_{n-1}, x_n),$$

donde $0 < r < 1$. Probar que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente.

Ejercicio 56. Para un espacio métrico M probar que son equivalentes:

- M es completo.
- Para toda sucesión descendiente $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ de conjuntos no vacíos cerrados, tales que
$$\lim_{n\to\infty} diam(B_n) = 0,$$
la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ es no vacía.

Sugerencia: Para una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, los conjuntos $A_j = \{x_n\}_{n\geq j}$ forman una sucesión de conjuntos descendiente. Tomar $B_j = \overline{A_j}$ el cual es un conjunto cerrado.

Ejercicio 57. Sea $(\mathbb{R}^k, d)$ con la métrica (euclídea) usual; sean a_j, $b_j \in \mathbb{R}$ tales que $a_j \leq b_j$, $1 \leq j \leq k$. Probar que si

$$A = \prod_{j=1}^{k} [a_j, b_j] = \{(x_j)_{j=1}^{k} \in \mathbb{R}^k : \; a_j \leq x_j \leq b_j \; , \; 1 \leq j \leq k\}$$

entonces $\operatorname{diam}(A) = (\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2)^{1/2}$.

Ejercicio 58. Sea (X, d) EM y sea $A \subseteq X$ no vacío. Probar las siguientes afirmaciones:

a) $\operatorname{diam}(A) = \infty$ si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existen x, $y \in A$ tales que $d(x, y) \geq n$.

b) Si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

c) Si $\operatorname{diam}(A) < r < \infty$ y $x \in A$ entonces $A \subseteq B_r(x)$.

d) Si $r > 0$ y $x \in X$ entonces $\operatorname{diam}(B_r(x)) \leq 2r$.

e) A es acotado si y solo si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Ejercicio 59. Analizar la convergencia y/o la convergencia absoluta de las series dadas:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{(n+1)}}$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Ejercicio 60. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum n^3 z^n$;

b) $\sum \frac{2^n}{n!} z^n$;

c) $\sum \frac{2^n}{n^2} z^n$;

d) $\sum \frac{n^3}{3^n} z^n$.

Ejercicio 61. Probar que la convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia de

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n},$$

si $a_n \geq 0$.

Ejercicio 62. ¿Es verdadero que si $a_n \geq 0$ es tal que $\sum a_n < \infty$, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente?

Ejercicio 63. Si $a_n > 0, b_n > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

demostrar que $\sum a_n < \infty$ si y sólo si $\sum b_n < \infty$ ¿Qué sucede si $c = 0$ o si $c = \infty$?

Ejercicio 64. Demostrar que si $\sum a_n$ converge pero no absolutamente entonces

$$\sum_{a_n>0} a_n = \infty, \qquad \sum_{a_n<0} a_n = -\infty.$$

Ejercicio 65. Supongamos que $a_n > 0$ y que $\sum a_n$ converge. Sea

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m.$$

a) Probar que

$$\frac{a_m}{r_m} + \ldots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m},$$

si $m < n$ y deducir que

$$\sum \frac{a_n}{r_n},$$

diverge

b) Probar que

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}),$$

y deducir que

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}},$$

converge.

Ejercicio 66. Supongamos que

a) Las sumas parciales A_n de $\sum a_n$ forman una sucesión acotada;

b) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

entonces $\sum a_n b_n$ converge.

Ejercicio 67.

a) Definimos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ recursivamente donde $x_0 = 0$, y

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{3},$$

para $n \geq 1$. Probar que la serie converge y calcular justificando

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

b) Justificar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

es converge o no. En caso que sea convergente calcular justificadamente el valor de la sumatoria.

Ejercicio 68. Hallar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4z-8)^n.$$

Ejercicio 69. Probar que la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n},$$

si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 70. Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$ y hallar el número al que converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugerencia: Separar en dos casos.

Ejercicio 71. Probar que si la serie $\sum |a_n|$ converge entonces la serie $\sum a_n^2$ también converge. Dar un contraejemplo para la reciproca, es decir, que $\sum a_n^2$ converja pero $\sum |a_n|$ diverja.

4 Continuidad en espacios métricos

En este capítulo vamos a desarrollar las nociones de límite y continuidad para funciones entre espacios métricos. Más adelante vamos a usar estas nociones en contextos más específicos (de dominios compactos ó conexos) para formalizar varios resultados fundamentales del análisis.

4.1 Límites de funciones entre espacios métricos

Obs 4.1. Sea (X,d) EM y sea $E\subseteq X$. Recordemos que si $p\in E'$ entonces para todo $\delta>0$ se tiene que

$$(B_\delta(p)\setminus\{p\})\cap E=\{x\in E:\ 0<d(p,x)<\delta\}\neq\emptyset\,.$$

En particular, este hecho nos ha permitido construir una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ en E con las siguientes dos propiedades: $x_n\neq p$, $n\geq1$ y $\lim_{n\to\infty}x_n=p$. △

Definición 4.2. Sean (X,d_X) y (Y,d_Y) EM's y sea $E\subseteq X$. Sea $f:E\to Y$ función y sea $p\in E'$ un punto límite de E. Decimos que existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende p, si existe $q\in Y$ tal que: para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta=\delta(\varepsilon,p)>0$ tal que si

$$x\in E\quad \text{y}\quad 0<d_X(p,x)<\delta\quad \text{entonces}\quad d_Y(q,f(x))<\varepsilon\,.$$

En este caso notamos $\lim_{x\to p}f(x)=q$. △

Obs 4.3. Con las notaciones de la definición anterior: notemos que

1. p puede no ser elemento de E;
2. Si $p\in E$ entonces puede que $\lim_{x\to p}f(x)=q\neq f(p)$.

△

Teorema 4.4. *Sean (X,d_X) y (Y,d_Y) EM's y sea $E\subseteq X$. Sea $f:E\to Y$ función y sea $p\in E'$ un punto límite de E y sea $q\in Y$. Entonces $\lim_{x\to p}f(x)=q$ si y solo si: para toda sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ en E tal que $x_n\neq p$, $n\geq1$ y $\lim_{n\to\infty}x_n=p$ en (X,d_X), se tiene que $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=q$ en (Y,d_Y).*

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to p}f(x)=q$ y sea sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ en E tal que $x_n\neq p$, $n\geq1$ y $\lim_{n\to\infty}x_n=p$ en (X,d_X). Consideramos la sucesión $(f(x_n))_{n\geq1}$ en Y: dado $\varepsilon>0$ entonces, por hipótesis, existe $\delta>0$ tal que si $x\in E$ y $0<d_X(p,x)<\delta$ vale que $d_Y(q,f(x))<\varepsilon$. Usando este $\delta>0$, concluimos que existe $n_0\geq1$ tal que si $n\geq n_0$ entonces $d_X(p,x_n)<\delta$. Como $x_n\neq p$ para $n\geq1$ entonces, si $n\geq n_0$

$$0<d_X(p,x_n)<\delta\implies d_Y(q,f(x_n))<\varepsilon\,.$$

Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=q$ en (Y,d_Y).

Supongamos ahora que NO se verifica que $\lim_{x\to p}f(x)=q$: si negamos la Definición 4.2 (teniendo cuidado con la lógica!) entonces concluimos que debe existir $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta>0$ vale que existe $e_\delta\in E$ tal que $0<d_X(p,e_\delta)<\delta$ y $d_Y(q,f(e_\delta))\geq\varepsilon$. Así, dado $n\geq1$ podemos considerar $x_n=e_{1/n}\in E$: de esta forma, construimos la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ tal que $0<d_X(p,x_n)<1/n$ (y en particular $x_n\neq p$, $n\geq1$) y $d_Y(q,f(x_n))\geq\varepsilon$. Notemos que entonces $\lim_{n\to\infty}x_n=p$ pero NO vale que $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=q$.

■

Corolario 4.5 (Unicidad de límites)**.** *Con las notaciones del teorema anterior: si* $\lim_{x\to p} f(x) = q$ *y* $\lim_{x\to p} f(x) = q'$ *entonces* $q = q'$.

Demostración. Recordemos que hemos probado la unicidad de límites de sucesiones. El corolario es entonces una consecuencia de la Observación 4.1 y del Teorema 4.4 (ejercicio). $\square$

Obs 4.6. Sea (X, d) EM, $E \subseteq X$ y sean $f, g : E \to \mathbb{C}$ funciones. Dado $b \in \mathbb{C}$ podemos definir $f + b\,g : E \to \mathbb{C}$ dada por $(f + b\,g)(x) = f(x) + b\,g(x) \in \mathbb{C}$, $x \in E$.

De forma similar, definimos $f \cdot g : E \to \mathbb{C}$ dada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{C}$, $x \in E$. Finalmente, si $g(x) \neq 0$ para $x \in E$ entonces queda definida $f/g : E \to \mathbb{C}$ dada por $(f/g)(x) = f(x)/g(x) \in \mathbb{C}$, $x \in E$. $\triangle$

Teorema 4.7. *Sea* (X, d) *EM,* $E \subseteq X$ *y consideramos* $\mathbb{C}$ *con la métrica usual. Sean* $f, g : E \to \mathbb{C}$ *y* $p \in E'$ *tales que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = z \in \mathbb{C} \quad y \quad \lim_{x\to p} g(x) = w \in \mathbb{C}\,.$$

Entonces

1. $\lim_{x\to p}(f + g)(x) = z + w$.
2. $\lim_{x\to p}(f \cdot g)(x) = z \cdot w$.
3. *Si* $w \neq 0$, *sea* $F = \{x \in E : \ g(x) \neq 0\} \subseteq E$; *entonces* $p \in F'$ *y vale que*

$$\lim_{x\in F,\ x\to p} (\frac{f}{g})(x) = \frac{z}{w}\,.$$

Demostración. Para verificar las afirmaciones anteriores podemos usar el Teorema 4.4 y reducir el problema al estudio de sucesiones. Más aún, recordemos que hemos probado propiedades similares en el caso de sucesiones. Por ejemplo, para probar 1: sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ (como $p \in E'$, la Observación 4.1 muestra que podemos considerar este tipo de sucesiones). Por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z\ ,\ \lim_{n\to\infty} g(x_n) = w \implies \lim_{n\to\infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = z + w\,.$$

Usando nuevamente el Teorema 4.4 vemos que vale 1. La prueba del ítem 2 es similar. Para probar 3. hay que notar que para poder considerar la función cociente f/g hay que restringir el dominio de esta función al conjunto F (donde g no se anula). Si $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que $x_n \neq p$, $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ entonces hemos probado que existe $n_0 \geq 1$ tal que $g(x_n) \neq 0$ para $n \geq n_0$ (porque $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = w \neq 0$). Esto muestra que $(x_n)_{n\geq n_0}$ es una sucesión en F tal que $x_n \neq p$, $n \geq n_0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$; esto último permite verificar que $p \in F'$ (ejercicio). En este caso, podemos aplicar el argumento con sucesiones para deducir la afirmación de este ítem (ejercicio). Para enfatizar que hemos restringido el análisis a F, incluimos esta restricción en la notación del límite. $\square$

4.2 Funciones continuas

Comenzamos considerando la noción de continuidad para funciones entre espacios métricos.

Definición 4.8. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ función.

1. Dado $p \in X$ decimos que $f(x)$ es continua en p si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que si
$$d_X(p, x) < \delta \quad \text{entonces} \quad d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon\,.$$
2. Decimos que $f(x)$ es una función continua (en X) si $f(x)$ es continua en cada uno de los puntos de X.

$\triangle$

Obs 4.9. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ función. Sea $p \in X$ y supongamos que p es punto aislado ($p \in \mathrm{Ais}(X)$) es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) = \{p\}$. En este caso, f es continua en p: en efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomando el $\delta > 0$ anterior (que existe porque p es aislado) entonces $d_X(x, p) < \delta$ garantiza que $x = p$ y luego $d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$. $\triangle$

La observación anterior muestra que el análisis de la continuidad de la función $f(x)$ se puede restringir a los puntos límite.

Teorema 4.10. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ función. Sea $p \in X'$ un punto límite de X. Entonces $f(x)$ es continua en $p \in X$ si y solo si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.*

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es continua en $p \in X$. Entonces, por definición, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$. Recíprocamente, si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < d_X(p, x) < \delta$ entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$. Pero como $d_Y(f(p), f(p)) = 0$ (con $x = p$) entonces es claro que si $d_X(p, x) < \delta$ (es decir, o bien $0 < d_X(p, x) < \delta$ ó bien $x = p$) entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$. $\blacksquare$

Corolario 4.11. *Sea (X, d) EM y consideramos $\mathbb{C}$ con la métrica usual. Sean $f,\ g : X \to \mathbb{C}$ funciones continuas en $p \in X$. Entonces $(f + g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$ son continuas en $p \in X$. Si $p \in F = \{x \in X :\ g(x) \neq 0\}$ entonces $f/g : F \to \mathbb{C}$ es continua en p.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Teorema 4.12. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ función. Entonces $f(x)$ es continua en $p \in X$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ en (X, d_X) se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ en (Y, d_Y).*

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es continua en p y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, p) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ por hipótesis. Pero en este caso, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d_X(x_n, p) < \delta$ y luego $d_Y(f(x_n), f(p)) < \varepsilon$ (para $n \geq n_0$). Lo anterior muestra que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ en (Y, d_Y).

Por otro lado, si $f(x)$ no es continua en p notemos que p no puede ser un punto aislado. En este caso, $p \in X'$. Por otro lado, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d_X(p, x_\delta) < \delta$ y $d_Y(f(x_\delta), f(p)) \geq \varepsilon$. En este caso, la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ dada por $z_n = x_{1/n} \in X$ verifica que $\lim_{n\to\infty} z_n = p$ pero $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ o bien no existe ó bien existe pero es distinto de $f(p)$. $\square$

Obs 4.13. Sea (X, d) EM. Recordemos que hemos considerado $\tau_d = \{U \subseteq X : \ U$ es abierto en $X\}$, llamada la topología en X inducida por la métrica d. τ_d es una clase de subconjuntos de X cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas que siempre contiene a X y $\emptyset$. $\triangle$

El siguiente resultado muestra que la noción de continuidad de una función es una propiedad *topológica* en el sentido que solo depende de las topologías inducidas por las métricas (y no de las métricas mismas).

Teorema 4.14. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ función. Entonces $f(x)$ es continua (en X) si y solo si: para todo $V \subseteq Y$ abierto en (Y, d_Y) vale que*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : \ f(x) \in V\} \subseteq X$$

es abierto en (X, d_X).

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es continua; sea $V \subseteq Y$ abierto y sea $p \in f^{-1}(V)$, es decir, $f(p) \in V$. Como V es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(f(p)) = \{y \in Y : \ d_Y(f(p), y) < \varepsilon\} \subseteq V \, .$$

Como f es continua en $p \in X$ entonces existe $\delta = \delta(p, \varepsilon) > 0$ tal que si $d_X(p, x) < \delta$ entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon$. Pero entonces,

$$x \in B_\delta(p) \implies d_X(p, x) < \delta \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(p)) \subseteq V \, .$$

Lo anterior muestra que $B_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$. Es decir, $p \in (f^{-1}(V))^o$ es un punto interior. Como $p \in f^{-1}(V)$ era arbitrario, concluimos que $f^{-1}(V) \subseteq X$ es conjunto abierto.

Recíprocamente, supongamos que siempre que $V \subseteq Y$ es abierto en (Y, d_Y) entonces $f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto en (X, d_X). Sea $p \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $V = B_\varepsilon(f(p)) \subseteq Y$ que es abierta. Como $p \in f^{-1}(V)$ (porque $f(p) \in V = B_\varepsilon(f(p))$) entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$; entonces: dado $x \in X$,

$$d(p, x) < \delta \implies x \in B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V) \implies f(x) \subseteq V = B_\varepsilon(f(p)) \implies d(f(p), f(x)) < \varepsilon \, .$$

Esto muestra que se verifica la Definición 4.8 y $f(x)$ es continua en $p \in X$. Como p era arbitrario, entonces $f(x)$ es continua. ■

Con las notaciones del resultado anterior, f es continua en X si y solo si

$$f^{-1}(V) \in \tau_{d_X} \, , \, \forall \, V \in \tau_{d_Y} \, .$$

Corolario 4.15. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ función. Entonces $f(x)$ es continua (en X) si y solo si: para todo $F \subseteq Y$ cerrado en (Y, d_Y) vale que $f^{-1}(F) = \{x \in X : \ f(x) \in F\} \subseteq X$ es cerrado en (X, d_X).*

Demostración. Recordemos que la preimagen por cualquier función tiene la siguiente propiedad: si $H \subseteq Y$ entonces $f^{-1}(Y \setminus H) = X \setminus f^{-1}(H)$.

Supongamos que para todo $F \subseteq Y$ cerrado en (Y, d_Y) vale que $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\} \subseteq X$ es cerrado en (X, d_X): si $V \subseteq Y$ es abierto entonces $F := Y \setminus V \subseteq Y$ es cerrado y

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(V) \subseteq X \text{ es cerrado } \implies f^{-1}(V) \subseteq X \text{ es abierto} \, .$$

Recíprocamente, supongamos que para todo $V \subseteq Y$ abierto en (Y, d_Y) vale que $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} \subseteq X$ es abierto en (X, d_X). Si $F \subseteq Y$ es cerrado entonces $V = Y \backslash F \subseteq Y$ es abierto y

$$f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(F) \subseteq X \text{ es abierto } \implies f^{-1}(F) \subseteq X \text{ es cerrado}.$$

El corolario es una consecuencia de la equivalencia previa y del Teorema 4.14. □

Teorema 4.16. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) EM's y sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones continuas. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es función continua entre los EM's (X, d_X) y (Z, d_Z).*

Demostración. Para probar la continuidad de la composición usamos el Teorema 4.14 junto con el siguiente hecho (válido para funciones arbitrarias): si $W \subseteq Z$ entonces

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \subseteq X .$$

Así, si $W \subseteq Z$ es abierto, entonces $g^{-1}(W) \subseteq Y$ es abierto, porque g es continua. Pero entonces $f^{-1}(g^{-1}(W)) \subseteq X$ es abierto, porque f es continua. Así, hemos probado que $(g \circ f)^{-1}(W) = f^1(g^{-1}(W)) \subseteq X$ es abierto, para $W \subseteq Z$ abierto. El Teorema 4.14 muestra que $g \circ f$ es continua. ■

Obs 4.17. En realidad es posible probar una versión local del teorema anterior, en donde sólo suponemos que las funciones son continuas en puntos (convenientemente elegidos). Concretamente, sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) EM's y sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones tales que f es continua en $p \in X$ y g es continua en $f(p) \in Y$. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es función continua en $p \in X$ (ejercicio: como sugerencia, argumentar en términos de sucesiones en X que tienden a p). △

Obs 4.18. Sea X un conjunto y sea $f : X \to \mathbb{R}^k$ una función. Recordemos para $1 \leq i \leq k$ podemos definir la función $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dada por $\pi_i((x_j)_{j=1}^k) = x_i \in \mathbb{R}$, $(x_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$; π_i es la proyección sobre la i-ésima coordenada. Notemos que formalmente,

$$(x_1, \ldots, x_k) = (\pi_1((x_j)_{j=1}^k), \ldots, \pi_k((x_j)_{j=1}^k)) \in \mathbb{R}^k .$$

Podemos definir las funciones coordenadas de la función f, dadas por $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, para $1 \leq i \leq k$. De esta forma, como $f(x) \in \mathbb{R}^k$,

$$f(x) = (\pi_1(f(x)), \ldots, \pi_k(f(x)) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad x \in X .$$

Lo anterior muestra que las funciones coordenadas de f nos permiten representar a los valores de f. △

Obs 4.19. Sea $1 \leq i \leq k$ y consideremos la proyección sobre la coordenada i-ésima: $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Si $x = (x_j)_{j=1}^k$, $y = (y_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$ entonces

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y)|^2 = |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{j=1}^k |x_j - y_j|^2 = \|x - y\|^2 .$$

La estimación anterior permite ver que π_i es una función continua en $\mathbb{R}^k$ según la Definición 4.8 (tomando $\delta = \epsilon > 0$), $1 \leq i \leq k$. △

Teorema 4.20. *Sea (X,d) EM, sea $\mathbb{R}^k$ con la métrica (euclídea) usual y sea $f : X \to \mathbb{R}^k$ función. Para cada $1 \leq i \leq k$, sea $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, la i-ésima función coordenada. Entonces*

1. *f es continua si y solo si f_i es continua, $1 \leq i \leq k$.*
2. *Si f, $g : X \to \mathbb{R}^k$ son funciones continuas y $\alpha : X \to \mathbb{R}$ es continua entonces*

$$f + g : X \to \mathbb{R}^k \quad , \quad \langle f \, , \, g \rangle : X \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha \, f : X \to \mathbb{R}^k$$

son funciones continuas.

Demostración. Veamos 1: por un lado, si f es continua entonces $f_i = \pi_i \circ f$ es continua por el Teorema 4.16. Recíprocamente, supongamos $f_i = \pi_i \circ f$ es continua para todo $1 \leq i \leq k$. Sea $p \in X$ y $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Entonces, por hipótesis y el Teorema 4.12 vemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(p) \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq k \, .$$

Por resultados del Cap 3. vemos que (como hay convergencia coordenada a coordenada) entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f_1(x_n), \ldots, f_k(x_n)) = (f_1(p), \ldots, f_k(p)) = f(p) \in \mathbb{R}^k$$

con respecto a la métrica usual de $\mathbb{R}^k$. En Teorema 4.12 ahora muestra que $f(x)$ es continua en $p \in X$; como p era arbitrario vemos que f es continua.

Antes de probar el ítem 2, aclaremos la notación: en este caso $f + g : X \to \mathbb{R}^k$ es la función dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \in \mathbb{R}^k$, $x \in X$. De forma similar, $\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle \in \mathbb{R}$ y $(\alpha \, f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x) \in \mathbb{R}^k$ determinan los valores de las demás funciones.

Notemos que si denotamos $f_i = \pi_i \circ f$ y $g_i = \pi_i \circ g$ a las funciones coordenadas de f y g, $1 \leq i \leq k$ entonces las funciones coordenadas $(f + g)_i = f_i + g_i$, $1 \leq i \leq k$. Por el Corolario 4.11 vemos que estas funciones coordenadas son continuas. Por la primer parte de la prueba concluimos que $f + g : X \to \mathbb{R}^k$ es continua. Los demás casos se prueban de forma similar (y se dejan de ejercicio!). □

Ejemplos 4.21. Consideramos los siguientes ejemplos:

1. Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces se verifica $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$. Así, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = |x|$ y $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ denota la métrica usual en $\mathbb{R}$, tenemos que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. Esto último implica que f es una función continua (de hecho, podemos tomar $\delta = \varepsilon > 0$ en la Definición 4.8).
2. Recordemos que las funciones coordenadas $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ son continuas, $1 \leq i \leq k$. Usando los resultados anteriores sobre funciones continuas podemos concluir que todo polinomio en las variables $(x_1, \ldots, x_k)$ es una función continua en $\mathbb{R}^k$.
3. Sea (X, d) EM y sea $E \subseteq X$. Consideramos la función *distancia al conjunto E*, notada

$$d^E : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad d^E(x) = \inf\{d(e, x) : \ e \in E\} \ , \ x \in X \, .$$

Notemos que d^E está bien definida en X y toma valores no negativos. Veamos que d^E es una función continua: en efecto, si $x, y \in X$ y $e \in E$ entonces

$$d^E(x) \leq d(x,e) \leq d(x,y) + d(y,e) \implies d^E(x) - d(x,y) \leq d(y,e)\,.$$

Como $e \in E$ es arbitrario, tomando ínfimo sobre $e \in E$ vemos que $d^E(x) - d(x,y) \leq d^E(y)$ y luego que $d^E(x) - d^E(y) \leq d(x,y)$. Cambiando los roles de x e y, (y repitiendo el argumento anterior) vemos que $-(d^E(x) - d^E(y)) = d^E(y) - d^E(x) \leq d(y,x) = d(x,y)$; las desigualdades anteriores muestran que

$$|d^E(x) - d^E(y)| \leq d(x,y) \quad \text{para} \quad x\, y \in X\,.$$

Esto último implica que d^E es una función continua (de hecho, podemos tomar $\delta = \varepsilon > 0$ en la Definición 4.8). △

4.3 Continuidad, compacidad y conexión

En lo que sigue vamos a usar algunas de las nociones topológicas consideradas previamente (conjuntos compactos, conexos) en espacios métricos en conjunto con la noción de continuidad. De esta forma, obtenemos una serie de resultados centrales del análisis.

Teorema 4.22. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's, y supongamos que (X, d_X) es compacto. Si $f : X \to Y$ es una función continua entonces $f(X) \subseteq Y$ es compacto en (Y, d_Y).*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un cubrimiento por abiertos de $f(X) \subseteq Y$: queremos mostrar que este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito de $f(X)$. Para mostrar esto, para $\alpha \in A$ consideramos $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$: entonces $U_\alpha \subseteq X$ es un abierto, por el Teorema 4.14. En este caso $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento (por abiertos) de X. En efecto, si $x \in X$ entonces $f(x) \in f(X)$ y existe $\alpha \in A$ tal que $f(x) \in V_\alpha$: entonces $x \in f^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha$. Como X es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq A$ tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in F}$ cubre a X. En este caso, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in F}$ es un subcubrimiento de $f(X)$: como antes, si $y \in f(X)$ entonces $y = f(x)$ para algún $x \in X$; en este caso existe $\alpha \in F$ tal que $x \in U_\alpha$ y luego $f(x) \in f(U_\alpha) = f(f^{-1}(V_\alpha)) \subseteq V_\alpha$ (verificar). Lo anterior muestra que $f(X) \subseteq Y$ es compacto. □

Teorema 4.23. *Sea (X, d) EM compacto y sea $f : X \to \mathbb{R}^k$ función continua. Entonces $f(X) \subseteq \mathbb{R}^k$ es cerrado y acotado.*

Demostración. Por el teorema anterior $f(X) \subseteq \mathbb{R}^k$ es subconjunto compacto y ya hemos verificado que en este caso $f(X)$ resulta cerrado y acotado. □

Obs 4.24. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado. En este caso, existe $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$. Más aún, recordemos que hemos verificado que $\sup A \in \overline{A}$. De forma similar, se verifica que $\inf A \in \overline{A}$ (ejercicio). △

Teorema 4.25. *Sea (X, d) EM compacto (y no vacío) y sea $f : X \to \mathbb{R}$ función continua. Entonces existen x_0, $x_1 \in X$ tales que*

$$f(x_0) = \max\{f(x) : \; x \in X\} \quad y \quad f(x_1) = \min\{f(x) : \; x \in X\}\,.$$

Demostración. Hemos mencionado que $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y acotado (y no vacío). Por la observación anterior, $\sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$ (porque $f(X)$ es cerrado). De forma similar, $\inf f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$. Lo anterior muestra que existen x_0, $x_1 \in X$ tales que

$$f(x_0) = \sup\{f(x) : \ x \in X\} \quad \text{y} \quad f(x_1) = \inf\{f(x) : \ x \in X\}\,.$$

Así, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in X$. En particular, valen las identidades propuestas en el enunciado del teorema. $\square$

Lema 4.26. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's tal que (X, d_X) es compacto. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua. Si $F \subseteq X$ es cerrado entonces la imagen directa $f(F) \subseteq Y$ es cerrada.*

Demostración. Si $F \subseteq X$ es cerrado entonces (F, d_F) es compacto. Por otro lado, la restricción $f|_F : F \to Y$ es una función continua de (F, d_F) en (Y, d_Y) (ejercicio: como sugerencia, notar que $(f|_F)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap F$ para todo $V \subseteq Y$, y recordar la descripción de los abiertos (relativos) en el espacio métrico (F, d_F)). Por el teorema anterior, $f|_F(F) = f(F) \subseteq Y$ es compacta y en particular, cerrada. $\square$

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y $f : X \to Y$ función. Decimos que f es *cerrada* (respectivamente f es *abierta*) si f manda cerrados en X en cerrados en Y (respectivamente, abiertos de X en abiertos de Y): formalmente, f es cerrada si $f(F) \subset Y$ es subconjunto cerrado siempre que $F \subset X$ sea subconjunto cerrado. Notemos que el resultado anterior muestra que si (X, d_X) es compacto y f es continua, entonces f es cerrada.

Definición 4.27. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$. Decimos que f es un homeomorfismo entre X e Y si f es continua, biyectiva y la función inversa (que está bien definida) $f^{-1} : Y \to X$ es continua. $\triangle$

Teorema 4.28. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's tal que (X, d_X) es compacto. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua y biyectiva. Entonces $f^{-1} : Y \to X$ es continua, es decir, f es un homeomorfismo.*

Demostración. Por hipótesis, la función inversa $g = f^{-1} : Y \to X$ está bien definida. Para probar su continuidad, basta verificar si $F \subseteq X$ es cerrado en X, entonces la preimagen $g^{-1}(F) \subseteq Y$ es cerrada en Y. Pero

$$g^{-1}(F) = (f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$$

coincide con la imagen directa $f(F) \subseteq Y$. Por el lema anterior, $f(F) \subseteq Y$ es cerrada y $g = f^{-1}$ resulta continua. $\square$

Ejemplo 4.29. La hipótesis de compacidad de X no puede ser omitida en el enunciado anterior. Por ejemplo, la función $h(x) : [0, 2\pi) \to S^1 = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : \ z^2 + w^2 = 1\}$ dada por $h(x) = (\sin(x), \cos(x))$, $x \in [0, 2\pi)$ es continua y biyectiva; pero $h^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ no es continua en $p = (0, 1) \in S^1$ (verificar). En este caso, $h(x)$ no es homeomorfismo. $\triangle$

Definición 4.30. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon\,.$$

Notemos que el δ anterior solo depende de $\varepsilon > 0$: así siempre que dos puntos cualesquiera x, $y \in X$ estén a distancia menor que δ, los valores $f(x)$ y $f(y)$ estarán a distancia menor que $\varepsilon > 0$. $\triangle$

Con las notaciones de la definición anterior, notemos que si f es uniformemente continua, entonces resulta continua en el sentido de la Definición 4.8 (con la condición adicional que el δ no depende de p!).

Ejemplo 4.31. En general, se pueden construir funciones continuas que no son uniformemente continuas (es decir, la condición de ser uniformemente continua es más fuerte que ser solo continua). En efecto, consideremos $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, $x \in (0,1)$. Entonces f es continua pero no uniformemente continua (ejercicio).

Teorema 4.32. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y supongamos que (X, d_X) es compacto. Si $f : X \to Y$ es función continua entonces resulta uniformemente continua*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$; como f es continua, para cada $p \in X$ existe $\delta_p > 0$ tal que si $d_X(p,x) < \delta_p$ entonces $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon/2$. Entonces $\{B_{\delta_p/2}(p)\}_{p\in X}$ es un cubrimiento por abiertos de X; como X es compacto, existe $F \subseteq X$ tal que $\{B_{\delta_p/2}(p)\}_{p\in F}$ es un subcubrimiento finito. Sea $\delta = \min\{\delta_q/2 : \ q \in F\}$; como se trata de un mínimo de una cantidad finita de números positivos, se tiene $\delta > 0$.

Sean $x, y \in X$ son tales que $d_X(x,y) < \delta$: notemos que debe existir $p \in F$ tal que $x \in B_{\delta_p/2}(p)$. En este caso, $d_X(p,x) < \delta_p/2 < \delta_p$. Pero entonces

$$d_X(p,y) \leq d_X(p,x) + d(x,y) < \delta_p/2 + \delta \leq \delta_p/2 + \delta_p/2 = \delta_p\,.$$

Así, $d_X(p,y) < \delta_p$. Por definición de δ_p tenemos que $d_Y(f(p), f(x)) < \varepsilon/2$ y $d_Y(f(p), f(y)) < \varepsilon/2$: entonces, por desigualdad triangular

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(p), f(x)) + d_Y(f(p), f(y)) < \varepsilon\,.$$

□

Teorema 4.33. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's y supongamos que (X, d_X) es conexo. Si $f : X \to Y$ es función continua entonces $f(X) \subseteq Y$ es subconjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(X) \subseteq Y$ no es conexo. En este caso existen abiertos V_1, $V_2 \subseteq Y$ tales que

$$V_1 \cap f(X) \neq \emptyset \neq V_2 \cap f(X) \ \ , \ \ V_1 \cap f(X) \cap V_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad f(X) \subseteq V_1 \cup V_2\,.$$

Consideremos $U_1 = f^{-1}(V_1)$ y $U_2 = f^{-1}(V_2)$. Entonces (verificar: ejercicio) U_1, $U_2 \subseteq X$ son abiertos

$$U_1 \neq \emptyset \neq U_2 \ \ , \ \ U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad X \subseteq U_1 \cup U_2\,.$$

Los hechos anteriores contradicen la hipótesis de que X es conexo. Esta contradicción muestra que $f(X)$ es conexo. □

Teorema 4.34 (de los valores intermedios). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(a) < f(b)$ (respectivamente $f(a) > f(b)$). Si $f(a) \leq c \leq f(b)$ (respectivamente $f(a) \geq c \geq f(b)$) entonces existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. Como $[a,b]$ es conexo (probado antes) entonces, por el teorema anterior, $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ es conexo. Por la caracterización de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (probada antes), si $f(a) \leq c \leq f(b)$ entonces (como $f(a)$, $f(b) \in f([a,b])$) vemos que $c \in f([a,b])$. Lo anterior muestra que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c$. □

Ejemplo 4.35. Consideremos $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, $x \geq 0$. Entonces $f(x)$ resulta continua (restricción de una función polinomial). Como $f(0) = 0 \leq 2 \leq f(2) = 4$ concluimos que debe existir $x \in [0,4]$ tal que $f(x) = 2$: en este caso, $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

4.4 Límites laterales en $\mathbb{R}$

Definición 4.36. Sea (X, d) espacio métrico, $q \in X$, a, $b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a, b) \to X$ una función.

1. Sea $a \leq c < b$: decimos que el límite, cuando x tiende a c por la derecha, de $f(x)$ es $q \in X$, notado $\lim_{x \to c^+} f(x) = q$ si para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en (c, b) tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ en $\mathbb{R}$, se verifica que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$ en (X, d).

2. Sea $a < c \leq b$: decimos que el límite, cuando x tiende a c por la izquierda, de $f(x)$ es $p \in X$, notado $\lim_{x \to c^-} f(x) = p$ si para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en (a, c) tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ en $\mathbb{R}$, se verifica que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = p$ en (X, d). $\triangle$

Obs 4.37. Sea (X, d) espacio métrico, $q \in X$, a, $b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a, b) \to X$ una función. Si $c \in (a, b)$ entonces $\lim_{x \to c} f(x) = q$ si y solo si $\lim_{x \to c^-} f(x) = q = \lim_{x \to c^+} f(x)$ (ejercicio!).

Definición 4.38. Sea (X, d) espacio métrico, a, $b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (a, b) \to X$ una función tal que f no es continua en $c \in (a, b)$. Decimos que f tiene una discontinuidad de primer clase (ó simple) en c si existen los límite laterales $\lim_{x \to c^-} f(x) = q$ y $\lim_{x \to c^+} f(x) = q'$ en X. En otro caso, decimos que f tiene una discontinuidad de segunda clase en c. $\triangle$

Definición 4.39. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es:

1. monótona creciente si $a < x \leq y < b$ entonces $f(x) \leq f(y)$.

2. monótona decreciente si $a < x \leq y < b$ entonces $f(x) \geq f(y)$.

3. monótona si es monótona creciente ó monótona decreciente.

$\triangle$

Teorema 4.40. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente en (a, b). Si $c \in (a, b)$ entonces*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : \ a < x < c\} \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : \ c < x < b\}\,.$$

Demostración. Sea $c \in (a, b)$: entonces $A = \{f(x) : \ x \in (a, c)\}$ está acotado superiormente por $f(c)$, porque f es monótona creciente. En particular, existe $\sup A = \alpha \leq f(c)$. Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ sucesión en (a, c) tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = c$. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\alpha - \varepsilon < \alpha$ no es cota superior de A: en este caso, existe $d \in (a, c)$ tal que $f(d) > \alpha - \varepsilon$. Como $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ y $c - d > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - c| < (c - d)$. En este caso, $d < x_n < c$, $n \geq n_0$; entonces

$$\alpha - \varepsilon < f(d) \leq f(x_n) \leq \alpha \implies |f(x_n) - \alpha| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_0\,.$$

Lo anterior muestra que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$; a su vez, esto muestra que existe

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \alpha = \sup\{f(x) : \ x \in (a, c)\} \leq f(c)\,.$$

La existencia del límite por derecha y el hecho de que coincida con el ínfimo indicado se deducen con argumentos similares (ejercicio). $\square$

Corolario 4.41. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ función monótona creciente.*

1. *f no tiene discontinuidades de segunda clase.*

2. *El conjunto de puntos en donde f es discontinua es a lo sumo numerable.*

Demostración. El primer item es consecuencia de la definición de discontinuidad de segunda clase y el resultado anterior.

Para probar el segundo ítem, sea $E \subseteq (a,b)$ el conjunto formado por los puntos en donde f es discontinua. Si $p \in E$ entonces necesariamente tenemos que

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \ell_p < \lim_{x \to p^+} f(x) = r_p\,.$$

En este caso podemos elegir $q(p) \in \mathbb{Q} \cap (\ell_p, r_p)$. De esta forma, queda definida una función $q : E \to \mathbb{Q}$. Notemos que esta función es inyectiva: en efecto, si p, $p' \in E$, $p < p'$ entonces

$$r_p = \lim_{x \to p^+} f(x) \leq \lim_{x \to (p')^-} f(x) = \ell_{p'}$$

(ejercicio: usar el resultado anterior). Entonces $q(p) < r_p \leq \ell_{p'} < q(p')$ y en particular, $q(p) \neq q(p')$. Notemos que de esta forma hemos construido una biyección $q : E \to q(E)$; como $q(E) \subseteq \mathbb{Q}$ entonces $q(E)$ es un conjunto a lo sumo numerable (por ser subconjunto de un conjunto numerable). Como E y $q(E)$ tienen el mismo cardinal, vemos que E es a lo sumo numerable. $\square$

Para finalizar este capítulo incluimos la noción de límite hacia los infinitos.

Definición 4.42. *Sea (X,d) espacio métrico, $E \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : E \to X$.*

1. *Supongamos que E no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Decimos que $f(x)$ tiende a $q \in X$ cuando x tiende a $+\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in E$ tal que $x \geq M$ se tiene que $d(f(x), q) < \varepsilon$.*

2. *Supongamos que E no está acotado inferiormente en $\mathbb{R}$. Decimos que $f(x)$ tiene a $r \in X$ cuando x tiende a $-\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in E$ tal que $x \leq M$ se tiene que $d(f(x), r) < \varepsilon$.*

$\triangle$

4.5 Ejercicios

Ejercicio 72. Sea $f : X \to Y$ una función continua donde X e Y son espacio métricos. Probar que

$$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)},$$

para todo conjunto $E \subset X$. Por medio de un ejemplo, mostrar que $f(\overline{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

Ejercicio 73. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demostrar que $f(x) = x$ para al menos un $x \in [0,1]$.

Ejercicio 74. Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas donde X, Y son espacio métricos, y sea E un subconjunto denso de X. Probar que $f(E)$ es denso en $f(X)$. Si $g(p) = f(p)$ para todo $p \in E$, probar que $g(p) = f(p)$ para todo $p \in X$.

Sugerencia: Para probar la densidad usar el ejercicio anterior. Probar que el conjunto

$$Z(\varphi) = \{p : \varphi(p) = 0\},$$

es cerrado (φ debe ser continua).

Ejercicio 75.

a) Sea $f \geq 0$, f continua en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Probar que $f = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

b) Demostrar que en $C([a, b])$ la función

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

es una norma (llamada la norma 1).

c) Probar que el espacio métrico $(C([a, b]), \|\cdot\|_1)$ con la métrica inducida por la norma 1 no es completo.

d) Probar que en $C([a, b])$ la función:

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

es un producto interno. Deducir que la expresión

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2},$$

es una norma, llamada norma 2. Verificar que $C([a, b])$ con la métrica inducida por la norma 2 no es completo.

Ejercicio 76. Probar la propiedad arquimediana de las potencias de funciones continuas crecientes: Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) > x$. Demostrar que dados $x, y \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) > y$ (donde n puede depender de x e y).

Importante: En este ejercicio entendemos por f^n a componer n veces a la función f consigo misma. Es decir, no es una potencia.

Ejercicio 77. Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Se define el **gráfico** de f como el conjunto

$$gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\}.$$

Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto. Demostrar que f es continua si y sólo si $gr(f)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejercicio 78. Probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{n}, & \text{Si } x = \frac{m}{n}, (m,n) = 1 \\ 1, & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.

Ejercicio 79. Utilizar la función continua

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2},$$

para probar que existen conjunto $U \subset \mathbb{R}$ abiertos tales que $f(U)$ no es un conjunto abierto.

Ejercicio 80. Una función de X en Y se dice **abierta** si $f(V)$ es abierto en Y para todo abierto V de X. Probar que toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abierta y continua es monótona.

Ejercicio 81. Sea $f : X \to Y$ dada por

$$f(t) = (cos(t), sen(t)),$$

donde $X = [0, 2\pi), Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Demostrar que f es continua y biyectiva, pero que f^{-1} no es continua. En este caso, $f(x)$ no es homeomorfismo.

Ejercicio 82. Sean A y B dos conjuntos disjuntos, cerrados y no vacíos de un espacio métrico X. Definimos

$$f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} \qquad (x \in X).$$

Demostrar que f es una función continua cuyo rango está en $[0,1]$ y además: $f(a) = 0$ para todo $a \in A$, $f(b) = 1$ para todo $b \in B$.

Ejercicio 83. Una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es convexa si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

donde $a < x < b$, $a < y < b$, $0 < \lambda < 1$.

1. Demostrar que toda función convexa es continua.
2. Supongamos que f es una función continua definida en (a,b) tal que

   $$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

   para todo $x, y \in (a,b)$. Demostrar que f es convexa.

Ejercicio 84. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua si existe una constante $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|\,.$$

Probar que las funciones Lipschitz continuas son densas en $C([a,b])$.

Ejercicio 85. Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Supongamos que existen U, V dos conjuntos abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$. Probar que la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

es continua.

b) Demostrar que (X, d) es conexo si, y sólo si, toda función continua $f : X \to \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 86. Probar que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 87. Probar que $f(x, y) = x^2 + 3y$ es uniformemente continua en $[0, 1] \times [0, 1]$ pero no en todo $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 88. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto no compacto. Dar ejemplos de $f : E \to \mathbb{R}$ tal que

a) f sea continua pero no acotada.

b) f sea continua y acotada y que no tenga máximo.

c) Suponiendo E acotado, f sea continua pero no uniformemente continua.

Ejercicio 89.

a) Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado y sea $f : E \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demostrar que f es acotada.

b) Ver que el resultado anterior es falso si E no es acotado.

Ejercicio 90. Sean A y B dos conjuntos disjuntos de $\mathbb{R}$ y supongamos que $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ es continua. Supongamos que f es uniformemente continua en A y en B ¿Es f uniformemente continua en $A \cup B$?

Ejercicio 91. Sea E un subconjunto no vacío de un espacio métrico X. Definimos la distancia de $x \in X$ a E por medio de

$$d_E(x) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

a) Probar que $d_E(x) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{E}$.

b) Probar que d_E es una función uniformemente continua en X.

Sugerencia: $d_E(x_2) \leq d(x_2, y) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, y)$, por lo tanto

$$d_E(x_2) \leq d(x_2, x_1) + d_E(x_1, y).$$

Ejercicio 92. Considerar a la función identidad de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, donde el dominio se considera con la métrica discreta y el codominio con la métrica usual. Probar que esta función es uniformemente continua pero que su dominio es acotado mientras que su rango no lo es.

Ejercicio 93. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica continua, es decir, existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 94. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica continua, es decir, existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 95. Sea $X \subset Y$ un conjunto acotado donde (Y, d) es un espacio métrico completo y sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua.

a) Probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,$$

donde $a \in X'$, entonces $f(x_n)$ converge.

b) Demostrar que para todo $a \in X'$, existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Ejercicio 96. Probar el siguiente enunciado: Para que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea uniformemente continua es necesario y suficiente, para todo par de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que

$$\lim_{n\to\infty} |y_n - x_n| = 0,$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |f(y_n) - f(x_n)| = 0.$$

Ejercicio 97. Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, supongamos que existe un $a > 0$ tal que f es uniformemente continua en $[0, a]$ y f es uniformemente continua en $[a, \infty)$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 98. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : X \to Y$ una función continua tal que $f_{|D}$ es uniformemente continua. Probar que f es uniformemente continua.

5 Diferenciación e integración en una variable real

En este capítulo vamos formalizar los conceptos de derivada e integral de funciones de una variable. Además, formalizamos varias de las relaciones entre estas nociones ya vistas en Análisis I. En un capítulo próximo vamos a continuar con la formalización de la noción de derivada para funciones de varias variables a valores vectoriales.

5.1 Funciones diferenciables de una variable real

Comenzamos recordando el concepto de derivada.

Definición 5.1. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x\in(a,b)$. Notemos que en este caso, $(a,b)'=[a,b]$.

1. Decimos que f es diferenciable en x si existe
$$f'(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\in\mathbb{R}\,.$$
En este caso definimos la derivada de f en x como el valor (límite) $f'(x)$ obtenido arriba.

2. Definimos $f':\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, donde $\mathcal{D}=\{x\in(a,b):\ f \text{ es derivable en } x\}\subseteq(a,b)$. Decimos que f es la (función) derivada de f.

3. Decimos que f es diferenciable en (a,b) si $\mathcal{D}=(a,b)$; en este caso queda definida $f':(a,b)\to\mathbb{R}$. △

Obs 5.2. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x\in(a,b)$.

1. f es diferenciable en x (por definición) si y solo si existe $\ell\in\mathbb{R}$ tal que: para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|h|<\delta$ es tal que $x+h\in(a,b)$, entonces $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\ell|<\varepsilon$. En este caso, definimos $f'(x)=\ell$. Notemos que el hecho de que $0<|h|<\delta$ garantiza que se puede dividir por $h\neq 0$ en el *cociente incremental*.

2. Existe $f'(x)$ si y solo si existe
$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\in\mathbb{R}$$
y en este caso el límite anterior coincide con $f'(x)$ (ejercicio). △

Teorema 5.3. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x\in(a,b)$. Si f es diferenciable en x entonces f es continua en x.*

Demostración. Vamos a usar la Observación anterior: en efecto, notemos que
$$\lim_{t\to x}f(t)=\lim_{t\to x}[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot(t-x)+f(x)]=f'(x)\cdot 0+f(x)=f(x)\,.$$
□

Obs 5.4. Recordemos que el recíproco del teorema anterior no es cierto: consideremos $f(x)=|x|$, para $x\in(-1,1)$. Entonces f es función continua en $(-1,1)$. Sin embargo, f no es diferenciable en $x=0$ (ejercicio). △

Teorema 5.5. *Sean f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$. Supongamos que f y g son diferenciables en x. Entonces $f+g$, $f \cdot g$, y (si $g(x) \neq 0$) f/g son diferenciables en x y vale que*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
3. $(f+g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Demostración. El ítem 1. es ejercicio (sugerencia: usar las hipótesis y las propiedades de los límites). Veamos el ítem 2 (usamos el ítem 2 de la Observación 5.2): sea $t \in (a,b)$, $t \neq x$,

$$\begin{aligned} f(t) \cdot g(t) - f(x) \cdot g(x) &= f(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(x) + f(t) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(t) \cdot (g(t) - g(x)) + g(x) \cdot (f(t) - f(x)) . \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{f(t) \cdot g(t) - f(x) \cdot g(x)}{t-x} = f(t) \cdot \frac{g(t)-g(x)}{t-x} + g(x) \cdot \frac{f(t)-f(x)}{t-x} .$$

Notemos que por las propiedades de los límites y por la continuidad de f en x (ver Teorema 5.3) vemos que

$$\lim_{t \to x} f(t) \cdot \frac{g(t)-g(x)}{t-x} = f(x) \cdot g'(x) .$$

De forma similar,

$$\lim_{t \to x} g(x) \cdot \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = g(x) \cdot f'(x) .$$

Los hechos anteriores junto con las propiedades de los límites muestran que vale 2 (detalles: ejercicio).

Veamos 3: notemos que si como g es diferenciable en x entonces g es continua en x. Como hemos supuesto que $g(x) \neq 0$ entonces por hipótesis, dado $\varepsilon = |g(x)|/2 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-t| < \delta$ entonces $|g(x) - g(t)| < |g(x)|/2$. Como $|g(x)| - |g(t)| < |g(x) - g(t)| < |g(x)|/2$ vemos que $|g(x)|/2 < |g(t)|$ siempre que $|x-t| < \delta$; en particular, $g(t) \neq 0$.

En el resto del argumento, vamos a restringirnos a los t's tales que $0 < |x-t| < \delta$ (con $\delta > 0$ como antes: esto no implica ninguna restricción esencial, porque estamos interesados en calcular límites de expresiones cuando $t \to x$). Notemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) / (t-x) &= \left(\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(t)} + \frac{f(x)}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) / (t-x) \\ &= \frac{1}{g(t)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \frac{1}{g(t) \cdot g(x)} \cdot f(x) \cdot \frac{g(x)-g(t)}{t-x} \end{aligned}$$

Notemos que por un lado,

$$\lim_{t \to x} \frac{1}{g(t)} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \frac{1}{g(x)} f'(x) = \frac{1}{g^2(x)} f'(x) \cdot g(x) .$$

Además,

$$\lim_{t \to x} \frac{1}{g(t) \cdot g(x)} \cdot f(x) \cdot \frac{g(x)-g(t)}{t-x} = \frac{1}{g^2(x)} \cdot f(x) \cdot -g'(x)$$

Los hechos anteriores, junto con las propiedades de los límites muestran que vale el ítem 3 (detalles: ejercicio). $\square$

Obs 5.6. Si $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$; si $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $g'(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ (ejercicio). Usando estos hechos, el resultado anterior e inducción se verifica que: si $h(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ (para $n \in \mathbb{N}^*$) entonces $h'(x) = n\, x^{n-1}$. A partir de aquí se verifica que si

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j \implies p'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\, a_j\, x^{j-1} \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

△

Teorema 5.7 (Regla de la cadena)**.** *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ una función diferenciable en $x \in (a,b)$ y sea $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $f(x) \in (c,d)$. Entonces la composición $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x \in (a,b)$ y vale que $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.*

Demostración. Sea $t \in (a,b)$, $t \neq x$: definamos $u(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} - f'(x)$. Entonces $\lim_{t\to x} u(t) = 0$; si definimos $u(x) = 0$ entonces $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua en x. Despejando de la definición de $u(t)$; tenemos que

$$f(t) - f(x) = (t-x) \cdot (f'(x) + u(t)) \quad \text{para} \quad t \in (a,b)\,.$$

De forma similar, definamos $v(s) = \frac{g(s)-g(f(x))}{s-f(x)} - g'(f(x))$, para $s \in (c,d) \setminus \{f(x)\}$. En este caso tenemos que $\lim_{s\to f(x)} v(s) = 0$; si definimos $v(f(x)) = 0$ entonces $v : (c,d) \to \mathbb{R}$ es continua en $f(x)$. Además,

$$g(s) - g(f(x)) = (s - f(x)) \cdot (g'(f(x)) + v(s)) \quad \text{para} \quad s \in (c,d)\,.$$

Si consideramos $t \in (a,b) \setminus \{x\}$ entonces, usando las identidades de más arriba con $s = f(t)$:

$$\begin{aligned} g(f(t)) - g(f(x)) &= (f(t) - f(x)) \cdot (g'(f(x)) + v(f(t))) \\ &= (t-x) \cdot (f'(x) + u(t)) \cdot (g'(f(x)) + v(f(t))) \end{aligned}$$

de forma que

$$\frac{g(f(t)) - g(f(x))}{t-x} = (f'(x) + u(t)) \cdot (g'(f(x)) + v(f(t))) \quad \text{para} \quad t \in (a,b) \setminus \{x\}\,.$$

Como v es una función continua en $f(x)$ entonces u y $v \circ f$ son funciones continuas en x, que se anulan en x. Así, podemos calcular

$$\lim_{t\to x}(f'(x)+u(t))\cdot(g'(f(x))+v(f(t))) = (f'(x)+u(x))\cdot(g'(f(x))+v(f(x))) = g'(f(x))\cdot f'(x)\,.$$

Los hechos anteriores prueban el resultado. □

En lo que sigue desarrollamos la formalización del teorema del valor medio (que es una herramienta fundamental en el análisis de funciones de una variable real).

Definición 5.8. Sea (X,d) un EM, $f : X \to \mathbb{R}$ y $x \in X$. Decimos que f tiene un máximo local (respectivamente un mínimo local) en x si existe $\varepsilon > 0$ tal que si $d(x,t) < \varepsilon$ entonces $f(t) \leq f(x)$ (respectivamente, $f(t) \geq f(x)$). △

Teorema 5.9. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $x \in (a,b)$ tal que f tiene un máximo local (respectivamente un mínimo local) en x y tal que f es diferenciable en x. Entonces $f'(x) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un máximo local en x. Como $x \in (a, b)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ de forma que si $t \in B_\varepsilon(x)$ entonces $f(t) \leq f(x)$. Si $x - \varepsilon < t < x$ entonces

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0 \implies f'(x) = \lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0$$

donde hemos usado que el numerador del cociente es no negativo y el denominador es negativo, y el hecho de que como existe el límite (que define a la derivada), entonces este límite debe coincidir con el límite lateral. De forma similar, si $x < t < x + \varepsilon$ entonces

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0 \implies f'(x) = \lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0$$

De las desigualdades anteriores vemos que debe valer que $f'(x) = 0$. El caso de mínimo local se prueba con un argumento similar y queda como ejercicio. □

Teorema 5.10 (Teorema del valor medio generalizado). *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b). Entonces, existe $x \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x) \,.$$

Demostración. Definamos $h(t) = (f(b) - f(a)) \cdot g(t) - (g(b) - g(a)) \cdot f(t)$, para $t \in [a, b]$. Entonces h es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Además, $h(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) = h(b)$. Sea $x \in [a, b]$ tal que h alcanza su valor máximo en $[a, b]$. Notemos que, en particular, x es un máximo local de f. Si $x \in (a, b)$ entonces, por el teorema anterior, se tiene que $h'(x) = 0$: pero en este caso,

$$0 = h'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(x) \,.$$

Lo anterior implica que vale el enunciado. Por otro lado, si $x = a$ ó $x = b$ entonces sea $z \in [a, b]$ un punto en donde f alcanza su valor mínimo en $[a, b]$. En este caso, si $z \in (a, b)$ podemos repetir el argumento anterior: notemos que $h'(z) = 0$ (por el teorema anterior) que implica $0 = h'(z) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(z) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(z)$ y vale el enunciado (ahora con un $z \in (a, b)$).

Finalmente, si $z = a$ ó $z = b$ (recordemos que estamos suponiendo, además, que $x = a$ ó $x = b$) entonces concluimos que h es una función constante en $[a, b]$: porque $h(a) = h(b)$ y si $w \in [a, b]$ entonces $h(a) = h(z) \leq h(w) \leq h(x) = h(a)$. En particular, h es constante en (a, b): si $w \in (a, b)$ es arbitrario, en este caso tenemos que $h'(w) = 0$ (porque h es constante) y luego $0 = h'(w) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(w) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(w)$ y vale el enunciado (ahora con un $w \in (a, b)$). □

Notemos que las vueltas que dimos en la prueba anterior tienen que ver con el hecho de que sabemos que h es diferenciable en (a, b) (y la expresión $h'(y) = 0$ sólo tiene sentido para $y \in (a, b)$).

Teorema 5.11 (Teorema del valor medio). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(x)$.*

Demostración. Consideremos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$, $x \in [a, b]$. Entonces g es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b); más aún, $g'(x) = 1$ para $x \in (a, b)$. Por el teorema anterior, existe un $x \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a)) \cdot g'(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x)$: usando que $g(a) = b$, $g(b) = b$ y $g'(x) = 1$ estamos. □

Teorema 5.12. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).*

1. *Si $f'(x) \geq 0$ para $x \in (a, b)$ entonces f es monótona creciente en $[a, b]$.*
2. *Si $f'(x) \leq 0$ para $x \in (a, b)$ entonces f es monótona decreciente en $[a, b]$.*
3. *Si $f'(x) = 0$ para $x \in (a, b)$ entonces f es constante en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que $f'(x) \geq 0$ para $x \in (a, b)$. Sean $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ y consideremos $f|_{[x_1,x_2]} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. Entonces $f|_{[x_1,x_2]}$ es continua en $[x_1, x_2]$ (por ser restricción de una función continua) y es diferenciable en (x_1, x_2). Por el teorema del valor medio, existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x) \geq 0$, porque $(x_2 - x_1) > 0$ y $f'(x) \geq 0$. Lo anterior implica que $f(x_2) \geq f(x_1)$ y f es monótona creciente. Los otros dos ítems se prueban de forma similar (ejercicios). $\square$

5.2 Derivadas de orden superior

Definición 5.13. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es diferenciable en (a, b); en este caso queda definida $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$, la función derivada de f. Si f' es a su vez diferenciable en un punto $x \in (a, b)$, entonces $(f')'(x)$ es simplemente notada $f''(x)$ ó $f^{(2)}(x)$. Si $f' = f^{(1)}$ es diferenciable en (a, b) entonces queda definida $f^{(2)} : (a, b) \to \mathbb{R}$.*

En general, asumiendo que está definida la función $f^{(n-1)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ (derivada de orden $n - 1 \geq 1$) entonces podemos definir el valor de la derivada de orden n de f en $x \in (a, b)$, notada $f^{(n)}(x)$, como el límite del cociente incremental de $f^{(n-1)}$ en x (siempre que este límite exista). $\triangle$

En general, dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ vamos a convenir en notar $f = f^{(0)}$.

Definición 5.14. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que está definida derivada n-ésima $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$, para algún $n \geq 1$. Dado $\alpha \in (a, b)$ definimos el polinomio de Taylor de f alrededor de α de orden n, notado $P_{\alpha,n}(x)$, dado por

$$P_{\alpha,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k \quad \text{para} \quad x \in (a, b) .$$

$\triangle$

Con las notaciones de la definición anterior, es claro que el polinomio de Taylor es una función polinómica a coeficientes reales de grado a lo sumo n. En este caso están definidas las derivadas de todos los órdenes de $P_{\alpha,n}(x)$. Notemos que $P_{\alpha,n}(x)$ se construye de forma que se verifican

$$f^{(k)}(\alpha) = (P_{\alpha,n})^{(k)}(\alpha) \quad \text{para} \quad 0 \leq k \leq n .$$

Teorema 5.15 (Desarrollo de Taylor)**.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que está definida la función $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$, para algún $n \geq 1$. Sea $P_{\alpha,(n-1)}(x)$ polinomio de Taylor de f alrededor de $\alpha \in (a, b)$ de orden $n-1$. Dado $\beta \in (a, b)$ entonces existe un número γ (estrictamente) entre α y β, de forma que*

$$f(\beta) = P_{\alpha,(n-1)}(\beta) + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!} (\beta - \alpha)^n .$$

Demostración. Vamos a suponer que $\alpha < \beta$ (el otro caso se prueba de forma similar y se deja como ejercicio). Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(\beta) = P_{\alpha,(n-1)}(\beta) + M\,(\beta-\alpha)^n \in \mathbb{R}$; en este caso queremos probar que $M = \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}$ para algún $\alpha < \gamma < \beta$. Definamos

$$g(x) = f(x) - (P_{\alpha,(n-1)}(x) + M\,(x-\alpha)^n) \quad \text{para} \quad x \in (a,b)\,.$$

Por construcción vemos que $g(\beta) = 0$. Además, notemos que está definida la función $g^{(k)} : (a,b) \to \mathbb{R}$, para $0 \le k \le n$; más aún, si $1 \le k \le n$ entonces

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P^{(k)}_{\alpha,(n-1)}(x) - \left(\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)\right) M\,(x-\alpha)^{n-k} \quad \text{para} \quad x \in (a,b)\,. \tag{12}$$

Notemos que por construcción, tenemos que

$$f^{(k)}(\alpha) = (P_{\alpha,(n-1)})^{(k)}(\alpha) \quad \text{y} \quad \left(\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)\right) M\,(x-\alpha)^{n-k}|_{x=\alpha} = 0 \quad , \quad 0 \le k \le n-1\,.$$

Así, usando la Eq. (12) podemos ver que

$$g^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha) - P^{(k)}_{\alpha,(n-1)}(\alpha) - \left(\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)\right) M\,(x-\alpha)^{n-k}|_{x=\alpha} = 0 \quad \text{para} \quad 0 \le k \le n-1\,.$$

Por otro lado, como $P_{\alpha,(n-1)}(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo $n-1$ entonces vemos que $P^{(n)}_{\alpha,(n-1)}(x) = 0$, $x \in (a,b)$.

Con las observaciones anteriores, ahora podemos argumentar como sigue: como $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ y g es diferenciable en (a,b), el Teorema del valor medio garantiza la existencia de un punto $\gamma_1 \in (\alpha,\beta)$ tal que $g^{(1)}(\gamma_1) = 0$.

Ahora recordamos que $g^{(1)}(\alpha) = g^{(1)}(\gamma_1) = 0$; como $g^{(1)}$ es diferenciable en (a,b), el Teorema del valor medio garantiza la existencia de un punto $\gamma_2 \in (\alpha,\gamma_1) \subseteq (\alpha,\beta)$ tal que $g^{(2)}(\gamma_2) = 0$.

Repitiendo el argumento anterior (n veces), concluimos que existe un punto $\gamma_n \in (\alpha,\gamma_{n-1}) \subseteq (\alpha,\beta)$ tal que $g^{(n)}(\gamma_n) = 0$. Usando la Eq. (12) (con $k = n$) y el hecho de que $P^{(n)}_{\alpha,(n-1)}(x) = 0$ para $x \in (a,b)$, concluimos que

$$0 = g(\gamma_n) = f^{(n)}(\gamma_n) - \left(\prod_{h=0}^{n-1}(n-h)\right) M \implies M = \frac{f^{(n)}(\gamma_n)}{n!}\,,$$

donde hemos usado que $(x-\alpha)^{n-n} = (x-\alpha)^0 = 1$ para todo $x \in (a,b)$. Así, eligiendo $\gamma = \gamma_n \in (\alpha,\beta)$ estamos hechos. $\square$

5.3 Diferenciación de funciones vectoriales de una variable

Definición 5.16. Sea $F : (a,b) \to \mathbb{R}^k$ una función a valores vectoriales, definida en (a,b). Dado $x \in (a,b)$, decimos que F es diferenciable en x si

$$\exists F'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \in \mathbb{R}^k\,.$$

Notemos que la condición anterior es equivalente a $\exists F'(x) = \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x} \in \mathbb{R}^k$.

Con la notación de la definición anterior, F es diferenciable en x y $F'(x) = q \in \mathbb{R}^k$ si y solo si: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in (a,b) \quad \text{y} \quad 0 < |t-x| < \delta \implies \left\| \frac{F(t)-F(x)}{t-x} - q \right\| < \varepsilon\,.$$

Obs 5.17. Sea $F : (a,b) \to \mathbb{R}^k$ una función a valores vectoriales, definida en (a,b). En este caso podemos considerar sus funciones coordenadas: $f_j = \pi_j \circ F : (a,b) \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le k$, de forma que

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k \quad \text{para} \quad x \in (a,b)\,.$$

$\triangle$

Teorema 5.18. *Sea $F : (a,b) \to \mathbb{R}^k$ y sean $f_j = \pi_j \circ F : (a,b) \to \mathbb{R}$, sus funciones coordenadas, $1 \le j \le k$. Dado $x \in (a,b)$, entonces*

1. *F es diferenciable en x y si y solo si para cada $1 \le j \le k$ se tiene que f_j es diferenciable en x. En este caso: $F'(x) = (f_j'(x))_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$.*
2. *Si F, $G : (a,b) \to \mathbb{R}^k$ son diferenciables en $x \in (a,b)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $F+G$, $\langle F, G\rangle$ y $\alpha \cdot F$ son diferenciables en x y*

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) \quad , \quad \langle F, G\rangle'(x) = \langle F'(x), G(x)\rangle + \langle F(x), G'(x)\rangle$$
$$(\alpha \cdot F)'(x) = \alpha \cdot F'(x)\,.$$

Demostración. Verificamos primero el ítem 1. Sea $t \in (a,b)$, $t \neq x$: si calculamos las coordenadas del cociente incremental, vemos que

$$\frac{F(t)-F(x)}{t-x} = \left(\frac{f_1(t)-f_1(x)}{t-x}, \ldots, \frac{f_k(t)-f_k(x)}{t-x}\right) \in \mathbb{R}^k\,.$$

Por un resultado anterior

$$\exists \lim_{t\to x} \frac{F(t)-F(x)}{t-x} = (\ell_j)_{j=1}^k \quad \text{si y solo si} \quad \exists \lim_{t\to x} \frac{f_j(t)-f_j(x)}{t-x} = \ell_j\ ,\ 1 \le j \le k\,.$$

Si miramos con cuidado y recordamos las correspondientes definiciones de derivadas, vemos que la equivalencia de arriba prueba el ítem 1.

Para probar las identidades del ítem 2, podemos usar el ítem 1. Por ejemplo, si $F(t) = (f_j(t))_{j=1}^k$ y $G(t) = (g_j(t))_{j=1}^k$, $t \in (a,b)$, describen las funciones F y G en términos de sus funciones coordenadas, entonces

$$(F+G)(t) = F(t) + G(t) = (f_j(t) + g_j(t))_{j=1}^k \quad \text{y} \quad (\alpha \cdot F)(t) = (\alpha\, f_j(t))_{j=1}^k\,.$$

Como F y G son diferenciables en x, usando el ítem 1., vemos que f_j y g_j son diferenciables en x, $1 \le j \le k$. En este caso, hemos probado que $(f_j + g_j)$ es diferenciable en x y $(f_j+g_j)'(x) = f_j'(x) + g_j'(x)$, $1 \le j \le k$. Usando nuevamente el ítem 1., ahora podemos ver que $F+G$ es diferenciable en x y que $(F+G)'(x) = F'(x)+G'(x)$. El caso de $\alpha \cdot F$ es similar, ejercicio. La identidad del producto interno es en realidad consecuencia de las propiedades de las derivadas de funciones reales de una variable: en efecto, notemos que

$$\langle F, G\rangle(x) = \langle F(x), G(x)\rangle = \sum_{j=1}^k f_j(x)\, g_j(x)\,.$$

Lo anterior permite ver que, usando resultados ya probados para funciones reales de una variable, $\langle F, G\rangle$ es diferenciable en x. Para obtener la identidad propuesta, hay que usar las reglas de la suma y el producto para derivadas e interpretar de forma conveniente el resultado (ejercicio). $\square$

Obs 5.19. Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). En este caso, en general no vale un teorema de valor medio: por ejemplo, si $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por $F(x) = (\cos(x), \sin(x))$ entonces

$$F(0) = (1, 0) = F(2\,\pi) \quad \text{y} \quad \|F'(t)\| = \|(-\sin(t), \cos(t))\| = 1 \quad \text{para} \quad t \in [0, 2\,\pi]\,.$$

$\triangle$

A pesar de los comentarios de la observación anterior, se pueden probar algunos resultados interesantes relacionados con controlar la distancia entre los valores de una función vectorial en términos de su derivada (que van a ser importantes más adelante).

Teorema 5.20. *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $\|F(b) - F(a)\| \leq \|F'(x)\|\,(b - a)$.*

Demostración. Definimos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \langle F(b) - F(a), F(t)\rangle$, $t \in [a, b]$. Si $F(t) = (f_j(t))_{j=1}^k$ entonces

$$g(t) = \sum_{j=1}^{k} (f_j(b) - f_j(a))\, f_j(t) \quad \text{para} \quad t \in [a, b]\,.$$

Lo anterior muestra que la función g es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Notemos que, por las propiedades del producto interno (linealidad en la segunda componente, fijada la primera)

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= \langle F(b) - F(a), F(b)\rangle - \langle F(b) - F(a), F(a)\rangle = \langle F(b) - F(a), F(b) - F(a)\rangle \\ &= \|F(b) - F(a)\|^2\,. \end{aligned}$$

Por otro lado, si calculamos

$$g'(x) = \sum_{j=1}^{k} (f_j(b) - f_j(a))\, f_j'(t) \quad \text{para} \quad t \in (a, b)\,.$$

En este caso, interpretando la sumatoria anterior como un producto interno y usando la desigualdad de Cauchy Schwarz, tenemos que

$$|g'(t)| \leq \|F(b) - F(a)\|\,\|F'(t)\| \quad \text{para} \quad t \in (a, b)\,.$$

Entonces, aplicando el teorema del valor medio a g, vemos que existe $x \in (a, b)$ tal que

$$\|F(b) - F(a)\|^2 = g(b) - g(a) = g'(x)\,(b - a) \leq |g'(x)|\,(b - a) \leq \|F(b) - F(a)\|\,\|F'(x)\|\,(b - a)\,,$$

donde hemos usado que $(b - a) > 0$. Si simplificamos a ambos lados de la desigualdad anterior, obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

5.4 La integral de Riemann de funciones de una variable

En lo que sigue formalizamos la noción de integral de Riemann para funciones de una variable real.

Definición 5.21. Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada (es decir, existen $c \le d \in \mathbb{R}$ tales que $c \le f(x) \le d$, para $x \in [a,b]$).

1. Una partición de $[a,b]$ es un conjunto finito $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$
En este caso escribimos $\Delta_i = x_i - x_{i-1} > 0$, para $1 \le i \le n$: y vale que $\sum_{i=1}^n \Delta_i = b - a$.

2. Dada una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ denotamos
$$M_i = \sup\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad m_i = \inf\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad , \quad 1 \le i \le n\,,$$
y definimos $U(P,f) = \sum_{i=1}^n M_i\,\Delta_i$ y $L(P,f) = \sum_{i=1}^n m_i\,\Delta_i$. Notar que como
$$d \ge M_i \ge m_i \ge c \implies d\,(b-a) \ge U(P,f) \ge L(P,f) \ge c\,(b-a)\,.$$

3. Definimos
$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf\{U(P,f) :\ P \text{ es partición de } [a,b]\ \} \in \mathbb{R}$$
$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup\{L(P,f) :\ P \text{ es partición de } [a,b]\ \} \in \mathbb{R}$$

4. Decimos que f es integrable Riemann en $[a,b]$ si
$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$$
y en este caso definimos la integral de Riemann de f, notada
$$\int_a^b f\,dx$$
como el número (valor) en la identidad anterior. En este caso notamos $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

$\triangle$

Obs 5.22. Con la notación de la definición anterior, recordemos que $L(P,f)$ es llamada la *suma inferior de Riemann* de f asociada a la partición P; de forma similar, $U(P,f)$ es llamada la *suma superior de Riemann* de f asociada a la partición P. Finalmente, las expresiones en el ítem 3. de la definición anterior corresponden a las *integrales superior e inferior* de Riemann de f.

Definición 5.23. Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y sean P y P^* particiones de $[a,b]$. Decimos que P^* refina a P si $P \subseteq P^*$. $\triangle$

Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y sean P y P' particiones de $[a,b]$. Notemos que entonces $P \cup P'$ es una partición de $[a,b]$ que refina simultáneamente a P y P'.

En la prueba que sigue vamos a usar que si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ son tales que B está acotado inferiormente (con lo cual A también está acotado inferiomente) entonces $\inf B \leq \inf A$ (ejercicio).

Teorema 5.24. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función acotada y sean P y P^* particiones de $[a,b]$ tales que P^* refina a P. Entonces*

$$U(P,f) \geq U(P^*,f) \geq L(P^*,f) \geq L(P,f)\,.$$

Demostración. Notemos que por construcción $U(P^*,f) \geq L(P^*,f)$. Probamos que $L(P^*,f) \geq L(P,f)$. Supongamos que P^* tiene exactamente un punto más que P: así, si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ entonces existen $1 \leq j \leq n$ y $x_{j-1} < x^* < x_j$ tales que $P^* = \{x_0, \ldots, x_{j-1}, x^*, x_j, \ldots, x_n\}$. Sean $m_i = \inf\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $1 \leq i \leq n$.

Notemos que por construcción $[x_{j-1}, x^*]$, $[x^*, x_j] \subseteq [x_{j-1}, x_j]$: entonces, usando la observación previa al enunciado del teorema (dos veces), vemos que si

$$w_1 = \inf\{f(x) :\ x \in [x_{j-1}, x^*]\} \quad \text{y} \quad w_2 = \inf\{f(x) :\ x \in [x^*, x_j]\} \implies m_j \leq w_1,\, w_2\,.$$

Más aún, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned} L(P^*,f) &= \sum_{i=1}^{j-1} m_i\ \Delta_i + w_1\,(x^* - x_{j-1}) + w_2\,(x_j - x^*) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i\ \Delta_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{j-1} m_i\ \Delta_i + \underbrace{m_j\,(x^* - x_{j-1}) + m_j\,(x_j - x^*)}_{=\,m_j\,(x_j - x_{j-1}) = m_j\,\Delta_j} + \sum_{i=j+1}^{n} m_i\ \Delta_i = L(P,f)\,. \end{aligned}$$

En general, si P^* se obtiene de agregar los puntos $\{x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ a P, es decir $P^* = P \cup \{x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ entonces podemos definir las particiones auxiliares $P_i = P \cup \{x_1^*, \ldots, x_i^*\} = P_{i-1} \cup \{x_i^*\}$, $1 \leq i \leq k$, donde $P_0 = P$ y $P_k = P^*$. Si aplicamos el caso considerado en la primera parte de la prueba (agregando un solo punto $P = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_k = P^*$),

$$L(P,f) = L(P_0,f) \leq L(P_1,f) \leq \ldots \leq L(P_{k-1},f) \leq L(P_k,f) = L(P^*,f)\,.$$

(cada desigualdad está justificada por la primer parte de la prueba, porque P_i se obtiene de P_{i-1} agregando un punto). Los hechos anteriores muestran que $L(P,f) \leq L(P^*,f)$. El caso $U(P,f) \geq U(P^*,f)$ se prueba de forma similar (ejercicio). □

Teorema 5.25. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función acotada y sean P_1 y P_2 particiones de $[a,b]$. Entonces $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$. En particular,*

$$\underline{\int_a^b} f\,dx \leq \overline{\int_a^b} f\,dx\,.$$

Demostración. Sea $P^* = P_1 \cup P_2$; entonces P^* refina a P_1 y P_2 a la vez. Aplicando el resultado anterior (dos veces) vemos que

$$L(P_1,f) \leq L(P^*,f) \leq U(P^*,f) \leq U(P_2,f)\,,$$

donde la desigualdad $L(P^*, f) \leq U(P^*, f)$ vale por construcción.

Si fijamos P_2 y tomamos supremo sobre todas las particiones P_1 de $[a, b]$, la primer parte de la prueba muestra que

$$\underline{\int_a^b} f\, dx \leq U(P_2, f)\,,$$

porque $U(P_2, f)$ es una cota superior de *toda* suma inferior de Riemann. Finalmente, si ahora tomamos ínfimos sobre las particiones P_2 de $[a, b]$ concluimos la desigualdad requerida (porque la integral inferior es una cota inferior de *toda* suma superior!). $\square$

Teorema 5.26. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función acotada. Entonces $f \in \mathcal{R}([a, b])$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0$ sea P es una partición tal que $0 \leq U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$: entonces, por el teorema anterior, se tiene que

$$L(P, f) \leq \underline{\int_a^b} f\, dx \leq \overline{\int_a^b} f\, dx \leq U(P, f) \implies 0 \leq \overline{\int_a^b} f\, dx - \underline{\int_a^b} f\, dx < \varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que las integrales inferior y superior deben coincidir. Esto muestra que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ en este caso.

Recíprocamente, si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$ tales que

$$0 \leq U(P_1, f) - \int_a^b f\, dx < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \int_a^b f\, dx - L(P_2, f) < \varepsilon/2$$

donde hemos usado el hecho de que podemos aproximar (arbitrariamente) el ínfimo (respectivamente supremo) de un subconjunto de $\mathbb{R}$ a través de los elementos del conjunto, y que las integrales superior e inferior coinciden (y son iguales a la integral de Riemann de f). Si ahora consideramos la partición $P = P_1 \cup P_2$, entonces se tiene que

$$\int_a^b f\ dx - \varepsilon/2 < L(P_2, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_1, f) < \int_a^b f\, dx + \varepsilon\,.$$

Las desigualdades anteriores garantizan que $0 \leq U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. $\square$

Obs 5.27. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función acotada y sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. En este caso hemos considerado las sumas superior e inferior de Riemann asociadas a P. Más generalmente, si elegimos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$ entonces podemos considerar la suma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(t_i)\, \Delta_i \in \mathbb{R}$. Usando las propiedades de los supremos e ínfimos ahora podemos comparar

$$L(P, f) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)\, \Delta_i \leq U(P, f)\,.$$

$\triangle$

Teorema 5.28. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función acotada y sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $0 \leq U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Entonces*

1. *Si P^* es una partición de $[a,b]$ que refina a P entonces* $0 \leq U(P^*, f) - L(P^*, f) < \varepsilon$.

2. *Si s_i, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$ entonces* $\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|\, \Delta_i < \varepsilon$.

3. *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta_i - \int_a^b f\, dx \right| < \varepsilon\,.$$

Demostración. Ejercicio! □

Teorema 5.29. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Demostración. Notemos que en tanto f es una función continua definida en un espacio métrico compacto, entonces f resulta acotada (ejercicio). Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario (pero fijo durante el argumento). Sea $\eta > 0$ tal que $(b-a)\,\eta < \varepsilon$. Como f es una función continua en $[a,b]$ y $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, entonces f resulta uniformemente continua. Así, dado existe $\delta > 0$ tal que si x, $y \in [a,b]$ son tales que $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \eta$.

Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $\Delta_i = x_i - x_{i-1} < \delta$, $1 \leq i \leq n$ (notemos que siempre podemos construir una partición con estas características: por ejemplo, podemos considerar $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a) < n \cdot \delta$ y en este caso definimos $x_i = a + i \cdot (b-a)/n$, $0 \leq i \leq n$: entonces se tiene que $\Delta_i < \delta$, $1 \leq i \leq n$, verificar!). Notemos que como f es continua en $[a,b]$ entonces, en particular, f es continua en el compacto $[x_{i-1}, x_i]$: entonces

$$m_i = \inf\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \min\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

y en particular, existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $m_i = f(t_i)$. De forma análoga, existe $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(s_i) = M_i = \sup\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Como t_i, $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ entonces $|s_i - t_i| \leq \Delta_i < \delta$ lo que muestra que $|M_i - m_i| = |f(s_i) - f(t_i)| < \eta$, $1 \leq i \leq n$ (por la continuidad uniforme). Entonces

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} \eta\, \Delta_i = \eta\,(b-a) < \epsilon\,.$$

Aplicando el Teorema 5.26 concluimos que $f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

Teorema 5.30. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$; dado $n \geq 1$ sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ dada por $x_i = a + i \cdot (b-a)/n$, $0 \leq i \leq n$. En este caso, $\Delta_i = (b-a)/n$, $1 \leq i \leq n$. Supongamos que f es monótona creciente: en este caso, por hipótesis, para $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$m_i = \inf\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) \quad \text{ y } \quad M_i = \sup\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i)\,.$$

Así,

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta_i - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\, \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\ (b-a)/n$$

Si observamos con cuidado, la sumatoria corresponde a una suma telescópica:

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) - f(x_0) = f(x_n) - f(x_0)$$

Reemplazando la suma anterior en la identidad previa, vemos que

$$U(P,f) - L(P,f) = (f(x_n) - f(x_0))\,(b-a)/n\,.$$

Ahora elegimos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $(f(x_n)-f(x_0))\,(b-a)/n < \varepsilon$. Lo anterior prueba que podemos construir una partición P de $[a,b]$ tal que $U(P,f)-L(P,f) < \varepsilon$. El Teorema 5.26 nos permite ver que $f \in \mathcal{R}([a,b])$. El caso en que f es monótona decreciente se prueba de forma similar y queda como ejericio. $\square$

Teorema 5.31. *Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y continua, salvo en una cantidad finita de puntos de $[a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para $x \in [a,b]$. Sea

$$E = \{x \in [a,b] : \quad f \text{ es discontinua en } x\}\,.$$

Por hipótesis, $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$. Si $1 \leq j \leq k$ y $e_j \neq a$, $e_j \neq b$ entonces podemos elegir $u_j < v_j \in [a,b]$ tales que $e_j \in (u_j, v_j)$ y $v_j - u_j < \varepsilon/2^j$; si $e_j = a$ entonces elegimos $u_j = a$ y $v_j \in (a,b]$ tal que $v_j - u_j < \varepsilon/2^j$ y de forma similar, si $e_j = b$ entonces elegimos $u_j \in [a,b)$ y $v_j = b$ tal que $v_j - u_j < \varepsilon/2^j$.

Sea

$$K = [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(u_j, v_j)$$

Notemos que $K \subseteq [a,b]$ es un subconjunto compacto y tal que $f|_K : K \to \mathbb{R}$ es función continua. De hecho, por construcción hemos eliminado las discontinuidades de f en (a,b); si f es discontinua en a, notemos que si bien $a \in K$, $a \in \operatorname{Ais}(K)$ es un punto aislado y $f|_K$ es continua en a, por definición; y algo similar sucede con b!

Como K es compacto, entonces $f|_K$ es uniformemente continua (por un resultado previo): así, existe $\delta > 0$ tal que si x, $y \in K$ son tales que $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Construimos una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ que verifique las siguientes propiedades: u_j, $v_j \in P$, para $1 \leq j \leq k$; si $0 \leq i \leq n$ y existe $1 \leq j \leq k$ tal que $x_i = u_j$ entonces $x_{i+1} = v_j$; si $1 \leq i \leq n$ y $x_{i-1} \neq u_j$ para todo $1 \leq j \leq k$ entonces $\Delta_i = x_i - x_{i-1} < \delta$ (la partición puede construirse tomando una partición $P' = \{y_0, \ldots, y_m\}$ de $[a,b]$ que contenga los u_j, v_j's y que verifique $y_i - y_{i-1} < \delta$, $1 \leq i \leq m$: en este caso, podemos quitar de P' aquellos puntos $y_i \in (u_j, v_j)$ para algún $1 \leq j \leq k$).

Con la notación anterior, si $1 \leq i \leq n$ y $x_{i-1} \neq u_j$ para todo $1 \leq j \leq k$, entonces $[x_{i-1}, x_i] \subseteq K$ (ejercicio!) y la restricción $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ es una función continua en el compacto $[x_{i-1}, x_i]$: entonces existen s_i, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(s_i) \quad \text{ y } \quad M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(t_i)\,.$$

Como $|s_i - t_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$ vemos que $M_i - m_i = f(t_i) - f(s_i) \leq \varepsilon$.

Por otro lado, si $1 \leq i \leq n$ y $x_{i-1} = u_j$ para algún $1 \leq j \leq k$ entonces: si

$$-M \leq m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{ y } \quad M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq M$$

verifican $(M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1}) = (M_i - m_i)\,(v_j - u_j) \leq 2\,M\,\varepsilon/2^j$, donde hemos usado que $x_i = v_j$, por construcción.

Notemos que entonces si definimos $A = \{1 \leq i \leq n : \ x_{i-1} \neq u_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq k\}$ y $B = \{1, \ldots, n\} \setminus A$ entonces

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i \in A} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i \in A} (x_i - x_{i-1}) + 2\,M \sum_{j=1}^{k} \varepsilon/2^j \leq \varepsilon \cdot ((b-a) + 2M)\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado que B está formado por k elementos y para cada $x_{i-1} \in B$ se tiene que $x_i - x_{i-1} < \varepsilon/2^j$ (verificar!). Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, el Teorema 5.26 nos permite ver que $f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

Teorema 5.32. *Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y tal que $m \leq f(x) \leq M$, para $x \in [a,b]$. Si $\phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ una función continua y consideramos la composición $\phi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces $\phi \circ f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ fijo y notamos $h = \phi \circ f$. Como ϕ es una función continua en el compacto $[m,M]$ entonces resulta uniformemente continua; en este caso, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que si $s, t \in [m,M]$ son tales que $|s - t| < \delta$ entonces $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$.

Como $f \in \mathcal{R}([a,b])$ concluimos que existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que $U(P,f) - L(P,f) < \delta^2$. Para cada $1 \leq i \leq n$ definimos:

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad , \quad m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\ ,$$

$$M_i^* = \sup\{h(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad , \quad m_i^* = \inf\{h(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\ .$$

Sea $A = \{1 \leq i \leq n : \ 0 \leq M_i - m_i < \delta\}$ y $B = \{1 \leq i \leq n : \ M_i - m_i \geq \delta\}$. Notemos que $A \cup B = \{1, \ldots, n\}$ y $A \cap B = \emptyset$.

Si $i \in A$ entonces: si $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ vale que $|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i < \delta$ que garantiza que $|h(x) - h(y)| = |\phi(f(x)) - \phi(f(y))| < \varepsilon$ (por continuidad uniforme de ϕ). Entonces, usando que $M_i^* = \lim_{k\to\infty} \phi(f(z_k))$ y $m_i^* = \lim_{k\to\infty} \phi(f(y_k))$, para ciertas sucesiones $(z_k)_{k\geq 1}$, $(y_k)_{k\geq 1}$ en $[x_{i-1}, x_i]$ convenientemente elegidas, vemos que

$$0 \leq M_i^* - m_i^* = \lim_{k\to\infty} \phi(f(z_k)) - \phi(f(y_k)) \leq \lim_{k\to\infty} |\phi(f(z_k)) - \phi(f(y_k))| \leq \varepsilon\,.$$

Si $i \in B$ fijo: notemos que la función $|\phi(x)|$ es continua en el compacto $[m,M]$ de forma que alcanza su máximo: $\max\{|\phi(x)| : \ x \in [m,M]\} = K \in \mathbb{R}$. En particular $-K \leq m_i^* \leq M_i^* \leq K$ que muestra que $M_i^* - m_i^* \leq 2K$.

Por otro lado, usando que $M_i - m_i \geq \delta$ para todo $i \in B$:

$$\delta \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\,\Delta_i \leq U(P,f) - L(P,f) < \delta^2\,.$$

Así, la desigualdad anterior muestra que $\sum_{i\in B}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i\in B}\Delta_i < \delta < \varepsilon$.

Finalmente, vemos que

$$\begin{aligned}
U(P,h) - L(P,h) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i^* - m_i^*)\,\Delta_i = \sum_{i\in A}(M_i^* - m_i^*)\,\Delta_i + \sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)\,\Delta_i \\
&\leq \varepsilon\sum_{i\in A}\Delta_i + 2K\sum_{i\in B}\Delta_i \leq \varepsilon\cdot((b-a)+2K)\,.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el Teorema 5.26 nos permite concluir que $h = \phi\circ f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

5.5 Propiedades de la Integral

Teorema 5.33. *Sean f, $g \in \mathcal{R}([a,b])$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:*

1. *Linealidad: $f+g$, $\alpha\cdot f \in \mathcal{R}([a,b])$ y*

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx \quad y \quad \int_a^b \alpha\cdot f\,dx = \alpha\cdot\int_a^b f\,dx\,.$$

2. *Monotonía: si $f(x) \leq g(x)$, $x\in[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx\,.$$

3. *Si $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ es acotada y $a<c<b$ entonces $h\in\mathcal{R}([a,b])$ si y solo si $h|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$ y $h|_{[c,b]}\in\mathcal{R}([c,b])$. Más aún, en este caso*

$$\int_a^b h\,dx = \int_a^c h\,dx + \int_c^b h\,dx\,.$$

4. *Si $|f(x)|\leq M$, $x\in[a,b]$ entonces*

$$\left|\int_a^b f\ dx\right| \leq M\,(b-a)\,.$$

Demostración. Veamos la prueba de la primer parte del ítem 1. Notemos que f y g son funciones acotadas (dado que son integrables). En este caso, la función $p = f+g : [a,b]\to\mathbb{R}$ también resulta acotada (ejercicio). Sea $P = \{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Dado $1\leq i\leq n$ definimos

$$m_i(f) = \inf\{f(x) :\ x\in[x_{i-1},x_i]\}\,,\ m_i(g) = \inf\{g(x) :\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

y de forma similar $m_i(p) = \inf\{p(x) :\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$. Si $x\in[x_{i-1},x_i]$ entonces

$$f(x)\geq m_i(f)\,,\ g(x)\geq m_i(g) \implies p(x) = f(x)+g(x) \geq m_i(f)+m_i(g)\,.$$

Como la acotación anterior vale para todo $x\in[x_{i-1},x_i]$, podemos ver que $m_i(p)\geq m_i(f)+m_i(g)$.

Por otro lado, si definimos

$$M_i(f)=\sup\{f(x):\ x\in[x_{i-1},x_i]\}\,,\ M_i(g)=\sup\{g(x):\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

y de forma similar $M_i(p)=\sup\{p(x):\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$ entonces, con un argumento parecido al anterior, podemos ver que $M_i(p)\leq M_i(f)+M_i(g)$, $1\leq i\leq n$. Teniendo en cuenta la estimación del párrafo anterior, tenemos que $M_i(p)-m_i(p)\leq (M_i(f)+M_i(g))-(m_i(f)+m_i(g))$.

Por hipótesis, dado $\varepsilon>0$ existen particiones P_1, P_2 de $[a,b]$ tales que $U(P_1,f)-L(P_1,f)<\varepsilon$, $U(P_2,f)-L(P_2,f)<\varepsilon$. Si definimos $P=P_1\cup P_2$ entonces, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned} U(P,p)-L(P,p) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(p)-m_i(p))\,\Delta_i\leq\sum_{i=1}^{n}[(M_i(f)+M_i(g))-(m_i(f)+m_i(g))]\,\Delta_i \\ &= (U(P,f)-L(P,f))+(U(P,g)-L(P,g))<2\,\varepsilon\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado que P refina a P_1 y P_2 junto con el ítem 1. del Teorema 5.28. Como $\varepsilon>0$ entonces concluimos que $p=f+g\in\mathcal{R}([a,b])$.

Con la misma partición P, tenemos que

$$0\leq U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon \quad \text{y} \quad L(P,f)\leq\int_a^b f\ dx\leq U(P,f)\implies$$

$$\int_a^b f\ dx-\varepsilon\leq L(P,f)\leq U(P,f)\leq\int_a^b f\ dx+\varepsilon\,. \tag{13}$$

De forma similar,

$$\int_a^b g\ dx-\varepsilon\leq L(P,g)\leq U(P,g)\leq\int_a^b g\ dx+\varepsilon\,. \tag{14}$$

Por otro lado, usando las desigualdades verificadas más arriba tenemos que

$$L(P,f)+L(P,g)\leq L(P,f+g)\leq\int_a^b f+g\ dx\leq U(P,f+g)\leq U(P,f)+U(P,g)\,.$$

Entonces, usando la desigualdad anterior y las desigualdades de las Eqs. (13) y (14) vemos que

$$\int_a^b f\ dx+\int_a^b g\ dx-2\,\varepsilon\leq\int_a^b(f+g)\ dx\leq\int_a^b f\ dx+\int_a^b g\ dx+2\,\varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon>0$ es arbitrario, las desigualdades anteriores muestran la primer igualdad de integrales del ítem 1.

El resto de los ítems se prueba con argumentos similares, y se dejan como ejercicio. □

Teorema 5.34. *Sean $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$. Entonces*

1. $f\cdot g\in\mathcal{R}([a,b])$.
2. $|f|\in\mathcal{R}([a,b])$ *y*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right|\leq\int_a^b|f|\,dx\,.$$

Demostración. Veamos el ítem 1. Sea $h \in \mathcal{R}([a,b])$; en este caso, h es acotada y existen m, $M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq h(x) \leq M$. Sea $\phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = x^2$, $x \in [m,M]$: entonces ϕ es continua en $[m,M]$. Por un resultado previo, $\phi \circ h = h^2 \in \mathcal{R}([a,b])$. Aplicando la observación previa a las funciones $f+g$, $f-g \in \mathcal{R}([a,b])$, usando que $\mathcal{R}([a,b])$ es cerrado bajo sumas y bajo productos por escalares, concluimos que $(f+g)^2$, $(f-g)^2 \in \mathcal{R}([a,b])$ y finalmente que

$$\frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2] = f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])\,.$$

Para probar el ítem 2., notemos que si como $f \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces f es acotada y y existen m, $M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$. Sea $\psi : [m,M] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = |x|$, $x \in [m,M]$: entonces ψ es continua en $[m,M]$. Por un resultado previo, $\psi \circ f = |f| \in \mathcal{R}([a,b])$.

Sea $c \in \{-1,1\}$ tal que $|\int_a^b f\,dx| = c\int_a^b f\,dx$. En este caso, $|c\,f| = |c|\,|f| = |f|$; en particular $c\,f(x) \leq |f(x)|$, $x \in [a,b]$. Aplicando las propiedades de linealidad y monotonía de la integral de Riemann, podemos ver que

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = c\int_a^b f\,dx = \int_a^b c\,f\,dx \leq \int_a^b |f|\,dx\,.$$

□

5.6 Integración y diferenciación en una variable real

Teorema 5.35. *Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y definamos la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para $x \in [a,b]$. Entonces F está bien definida y es una función continua en $[a,b]$. Más aún, si f es continua en $x_0 \in (a,b)$ entonces F es diferenciable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Demostración. Por el Teorema 5.33, la función F está bien definida en $[a,b]$. Como f es integrable entonces es acotada; sea $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Si $a \leq x \leq y \leq b$ entonces

$$|F(y) - F(x)| = |\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt| = |\int_x^y f(t)\,dt| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M\,|y-x|\,.$$

La estimación anterior muestra que F es uniformemente continua en $[a,b]$; en particular, F es continua.

Supongamos que f es continua en $x_0 \in (a,b)$: dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que si $t \in [a,b]$ es tal que $|t - x_0| < \delta$ entonces $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Sea $x \in [a,b]$ es tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ y consideremos los siguientes casos:

1er caso: si $x_0 < x < x_0 + \delta$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0)\right| = \frac{1}{x-x_0}\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{x-x_0}\,\varepsilon\,(x-x_0) = \varepsilon\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\,,$$

la linealidad de la integral y el hecho de que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $x_0 \leq t \leq x < x_0 + \delta$.

2do caso: si $x_0 - \delta < x < x_0$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{-1}{x - x_0}\int_x^{x_0} f(t)\,dt - f(x_0)\right| = \frac{1}{x_0 - x}\left|\int_x^{x_0} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{x_0 - x}\,\varepsilon\,(x_0 - x) = \varepsilon\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} f(x_0)\,dt\,,$$

la linealidad de la integral y el hecho de que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $x_0 - \delta < x \leq t \leq x_0$.

Los casos 1 y 2 muestran la existencia de los límite laterales del cociente incremental de los valores de F alrededor de x_0, y que estos límites coinciden con $f(x_0)$. Así, ahora podemos concluir que

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

de forma que F es diferenciable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Teorema 5.36 (Teorema fundamental del cálculo)**.** *Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y supongamos que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tal que tal que $F'(x) = f(x)$ para, $x \in (a, b)$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)\,.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$; como $f \in \mathcal{R}([a, b])$ podemos considerar una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $0 \leq U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Notemos que si $1 \leq i \leq n$ entonces $F|_{[x_{i-1}, x_i]} : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[x_{i-1}, x_i]$ y diferenciable en (x_{i-1}, x_i); por el teorema del valor medio existe $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)\,(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Utilizando el hecho de que $x_0 = a$, $x_n = b$ entonces

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Por otro lado, usando los hechos anteriores y el ítem 3 del Teorema 5.28, concluimos que

$$\left|(F(b) - F(a)) - \int_a^b f\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta_i - \int_a^b f\,dx\right| < \varepsilon\,.$$

□

Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$; en adelante, dados $a \leq b$, convenimos en notar

$$\int_b^a f\ dx = -\int_a^b f\ dx \in \mathbb{R}\,.$$

Corolario 5.37. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua y sea* $g : [c,d] \to (a,b)$ *continua en* $[c,d]$ *y diferenciable en* (c,d)*. Extendamos la función* g' *a una función* $g' : [c,d] \to \mathbb{R}$ *de forma que* $g'(c) = g'(d) = 0$ *(los valores anteriores se determinan de forma arbitraria!) y supongamos que* $g' \in \mathcal{R}([c,d])$*. Entonces la función* $f \circ g \cdot g' \in \mathcal{R}([c,d])$ *y vale que*

$$\int_c^d f \circ g \cdot g' \; dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f \; dx \, .$$

Demostración. Consideramos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) \; dt \quad \text{ para } \quad x \in [a,b] \, .$$

Por resultados previos la función F es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) de forma que $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$. Así, por el teorema anterior

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t) \, dt = F(g(d)) - F(g(c)) \, ,$$

en donde consideramos la convención previa, cuando $g(c) > g(d)$) (y en ese caso también vale la identidad! ejercicio). Por otro lado, $F \circ g$ es una función continua en $[c,d]$ y diferenciable en (c,d): más aún, por la regla de la cadena

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f \circ g(x) \cdot g'(x) \quad \text{ para } \quad x \in (c,d) \, .$$

Aplicando nuevamente el teorema anterior concluimos que

$$\int_c^d f \circ g \cdot g' \; dx = F(g(d)) - F(g(c)) \, .$$

El resultado es una consecuencia de las identidades previas. □

Corolario 5.38 (Integración por partes)**.** *Sean* $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $[a,b]$ *y diferenciales en* (a,b) *y notemos* $f(x) = F'(x)$*,* $g(x) = G'(x)$*,* $x \in (a,b)$*. Extendamos* f *y* g *de forma arbitraria a funciones definidas en* $[a,b]$ *y supongamos que* f*,* $g \in \mathcal{R}([a,b])$*. Entonces*

$$\int_a^b F \cdot g \; dx = [F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a)] - \int_a^b f \cdot G \; dx \, .$$

Demostración: ejercicio. □

5.7 Integración de funciones vectoriales

Definición 5.39. Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ y sean $f_1, \ldots, f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de F. Decimos que F es integrable Riemann en $[a,b]$, notado $F \in \mathcal{R}([a,b])$ si cada $f_j \in \mathcal{R}([a,b])$, $1 \leq j \leq k$. En este caso definimos la integral

$$\int_a^b F \; dx = \left(\int_a^b f_1 \; dx \, , \; \ldots \; , \int_a^b f_k \; dx \right) \in \mathbb{R}^k \, .$$

△

Teorema 5.40. *Sean F, $G : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ tales que F, $G \in \mathcal{R}([a,b])$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:*

1. *Linealidad: $F+G$, $\alpha \cdot F \in \mathcal{R}([a,b])$ y*

$$\int_a^b (F+G)\,dx = \int_a^b F\,dx + \int_a^b G\,dx \in \mathbb{R}^k \quad \text{y} \quad \int_a^b \alpha \cdot F\,dx = \alpha \cdot \int_a^b F\,dx \in \mathbb{R}^k .$$

2. *Si $H : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ es acotada y $a < c < b$ entonces: $H \in \mathcal{R}([a,b])$ si y solo si $H|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$ y $H|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$. Más aún, en este caso*

$$\int_a^b H\,dx = \int_a^c H\,dx + \int_c^b H\,dx \in \mathbb{R}^k .$$

3. *Supongamos que existe $P : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y tal que $P'(x) = F(x)$, $x \in (a,b)$. Entonces*

$$\int_a^b F\ dx = P(b) - P(a) \in \mathbb{R}^k .$$

4. *La función $I : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ dada por*

$$I(x) = \int_a^x F(t)\ dt \quad \text{para} \quad x \in [a,b]$$

resulta continua en $[a,b]$. Además, si $x_0 \in (a,b)$ es tal que F es continua en x_0 entonces I es diferenciable en x_0 y $I'(x_0) = F(x_0)$.

5. *Sea $\|F\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función dada por $\|F\|(x) = \|F(x)\| \in \mathbb{R}$, $x \in [a,b]$. Entonces $\|F\| \in \mathcal{R}([a,b])$ y se tiene que*

$$\left\| \int_a^b F\ dx \right\| \leq \int_a^b \|F\|\ dx .$$

Demostración. Los ítems 1.,2.,3. y 4. son ejercicios (sugerencia: usar la definición de integral de funciones de una variable real a valores vectoriales y reducir la prueba al caso de funciones de una variable a valores reales).

En lo que sigue, verificamos el ítem 5. Sean $f_1, \ldots, f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de la función F, es decir: $F(x) = (f_j(x))_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$, $x \in [a,b]$. Como cada $f_j \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces, usando resultados previos, concluimos que $f_j^2 \in \mathcal{R}([a,b])$, $1 \leq j \leq k$. Entonces $h = \sum_{j=1}^k f_j^2 \in \mathcal{R}([a,b])$. En particular, h es una función acotada y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq h \leq M$. Sea $\phi : [0,M] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = x^{1/2}$, $x \in [0,M]$. En este caso ϕ es una función continua; entonces $\phi \circ h = \|F\| \in \mathcal{R}([a,b])$. Usando la definición de integral de F en $[a,b]$ podemos ver que

$$\left\| \int_a^b F\ dx \right\|^2 = \sum_{j=1}^k \left(\int_a^b f_j\ dx \right)^2 = \sum_{j=1}^k \int_a^b \left(\int_a^b f_j(t)\ dt \right) f_j\ dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k \left(\int_a^b f_j(t)\ dt \right) f_j\ dx$$

Usando la desigualdad de Cauchy Schwarz podemos dar una cota superior a la función que aparece dentro de la útlima integral: dado $x \in [a,b]$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\left(\int_a^b f_j(t)\ dt\right) f_j(x) &\leq \left(\sum_{j=1}^{k}\left(\int_a^b f_j(t)\ dt\right)^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}(f_j(x))^2\right)^{1/2}\\ &= \left\|\int_a^b F\ dx\right\|\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}(f_j(x))^2\right)^{1/2} = \left\|\int_a^b F\ dx\right\|\cdot\|F(x)\|\,.\end{aligned}$$

Utilizando la estimación anterior y la propiedad de monotonía de la integral, podemos concluir que

$$\left\|\int_a^b F\ dx\right\|^2 = \int_a^b\sum_{j=1}^{k}\left(\int_a^b f_j(t)\ dt\right) f_j\ dx \leq \left\|\int_a^b F\ dx\right\|\cdot\int_a^b \|F(x)\|\ dx\,.$$

El resultado se obtiene de simplificar en la desigualdad entre el primer y último miembro en la última cadena de desigualdades. □

5.8 Ejercicios

Ejercicio 99. Sea f la función definida por: $f(x) = 0$ si x es irracional y $f(x) = 1$ si x es racional. Probar que f no es Riemann integrable en ningún intervalo $[a,b]$.

Ejercicio 100. Sea $f : [2,8] \to \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto 1/x^3$, y para todo $n \geq 1$ definimos la partición

$$Q_n = \{2\eta^i : 0 \leq i \leq n\}$$

donde $\eta^n = 4$.

1. Calcular

$$L(Q_n,f), \qquad U(Q_n,f).$$

   Pueden asumir que para $|x| < 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}.$$

2. Probar por definición que f es integrable Riemann sobre $[2,8]$ y hallar el valor de la integral.

Ejercicio 101. Supongamos que f es dos veces diferenciable en $(0,\infty)$, f'' está acotada en $(0,\infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Probar que $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Ejercicio 102. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que x es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.

a) Si f es diferenciable y $f'(t) \neq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces f tiene como mucho un punto fijo.

b) Probar que la función definida por

$$f(t) = t + (1+e^t)^{-1},$$

no tiene puntos fijos y que $0 < f'(t) < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

c) Si existe una constante $A < 1$ tal que $\left|f'(t)\right| \leq A$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces f tiene un punto fijo x, y $x = \lim x_n$ donde x_1 es un número real arbitrario y

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Ejercicio 103. Sea f una función real diferenciable definida en (a, b).

a) Demostrar que f es convexa si y sólo si f' es monótona creciente.

b) Suponer que $f''(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$. Probar que f es convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Ejercicio 104. Sea f una función diferenciable sobre $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$ y que existe un número real A tal que $\left|f'(x)\right| \leq A\,|f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que $f \equiv 0$.

Ejercicio 105. Supongamos que existen $f'(x), g'(x)$, además $g'(x) \neq 0$, y que $f(x) = g(x) = 0$. Probar que

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejercicio 106. Supongamos que f' es continua en $[a, b]$ y sea $\varepsilon > 0$. Probar que existe $\delta > 0$, tal que

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |t - x| < \delta; a \leq x \leq b; a \leq t \leq b$. Podría expresarse esto diciendo que f es uniformemente diferenciable en $[a, b]$ si f' es continua en $[a, b]$. ¿Se cumple esto también para las funciones vectoriales?

Ejercicio 107. Suponer que f es continua para $x \geq 0$, f' existe para $x > 0$, $f(0) = 0$ y f' es monótona creciente. Probar que la función definida por $g(x) = f(x)/x$ (para $x > 0$) es monótona creciente.

Ejercicio 108. Supongamos que f tiene derivada finita en (a, b) y es continua en $[a, b]$ con $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para todo número real λ existe c en (a, b) tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

6 Espacios de funciones

Un tipo muy importante de espacio vectorial son los espacios formados por ciertos tipos de funciones. En este capítulo vamos a estudiar un tipo de métrica en espacios de funciones conocida como métrica uniforme. En algunos casos, los límites en la métrica uniforme de sucesiones formadas por funciones que tienen cierta propiedad heredan esta propiedad (por ejemplo, el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas resulta continuo). Además de la topología inducida por la métrica uniforme, se pueden considerar otro tipo de topologías (que no provienen de métricas!) en los espacios funcionales. Vamos a hacer una descripción informal de estas topologías y las vamos a comparar con la topología de la métrica uniforme.

6.1 Convergencias en espacios de funciones

Definición 6.1 (Convergencia puntual)**.** Sea E un conjunto, (Y, d) EM y $f : E \to Y$, $f_n : E \to Y$ funciones, $n \in \mathbb{N}^*$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función f si: para todo $x \in E$ la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$ en (Y, d). △

Con las notaciones de la definición anterior, notemos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función f si: para todo $x \in E$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(x, \varepsilon) \geq 1$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0 \,.$$

Obs 6.2. Sea E un conjunto (Y, d) un EM completo y $f_n : E \to Y$ función, $n \in \mathbb{N}^*$. Supongamos que para cada $x \in E$ se tiene que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d). Como (Y, d) es un espacio métrico completo, sabemos que la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge. En este caso podemos definir $f : E \to Y$ determinada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Así, queda determinada la función f de forma que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a f. △

Obs 6.3. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, $f : X \to Y$, $f_n : X \to Y$ funciones, $n \geq 1$. Supongamos además que f_n es función continua, $n \geq 1$, y que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a f. Entonces, en general, no podemos deducir que el límite (puntual) f sea una función continua. Para verificar esta afirmación, consideramos el siguiente ejemplo:

Sea $[0, 1]$ con la métrica usual (como subespacio de $\mathbb{R}$) y para cada $n \geq 1$, sea $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, dada por $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Entonces cada f_n es función continua en $[0, 1]$. Además, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente al límite $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dado por $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1)$ y $f(1) = 1$ (ejercicio). Es claro que f no es una función continua en este caso. △

El ejemplo anterior muestra que la noción de convergencia puntual es más bien débil, en el sentido que no permite garantizar que el límite puntual de funciones continua sea una función continua. La siguiente noción de convergencia, que es más fuerte, si va a permitir obtener conclusiones del estilo anterior.

Definición 6.4. Sea E un conjunto, (Y, d) EM y $f : E \to Y$, $f_n : E \to Y$ funciones, $n \in \mathbb{N}^*$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función f si: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \geq 1$ tal que

$$\sup\{d(f_n(x), f(x)) : \; x \in E\} < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0 \,.$$

△

Obs 6.5. Con las notaciones de la definición anterior, supongamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a la función f: entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función f. En efecto, dado $z \in E$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$d(f(z), f_n(z)) \leq \sup\{d(f(x), f_n(x)) : \ x \in E\} < \varepsilon \, .$$

En general, la recíproca de la afirmación anterior no vale (veremos un ejemplo más adelante). $\triangle$

Definición 6.6. Sea X un conjunto, (Y, d) EM, $f_n : X \to Y$ función, $n \geq 1$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente de Cauchy si: para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si m, $n \geq n_0$ entonces

$$\sup\{d(f_n(x), f_m(x)) : \ x \in X\} < \varepsilon \, .$$

$\triangle$

Teorema 6.7. *Sea X un conjunto, (Y, d) EM completo y $f_n : X \to Y$ función, $n \geq 1$. Entonces existe una función $f : X \to Y$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f si y solo si la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que existe una función $f : X \to Y$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. Dado $\varepsilon > 0$ entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\sup\{d(f_n(x), f(x)) : \ x \in X\} < \varepsilon/2$. En este caso, si n, $m \geq n_0$ entonces: si $z \in X$ tenemos que

$$d(f_n(z), f_m(z)) \leq d(f_n(z), f(z)) + d(f(z), f_m(z)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \, .$$

Tomando supremo sobre todo $z \in X$

$$\sup\{d(f_n(z), f_m(z)) : \ z \in X\} \leq \varepsilon \, .$$

Lo anterior muestra que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente de Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente de Cauchy. Entonces, dado $z \in X$ se tiene que $(f_n(z))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon > 0$: entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que si m, $n \geq n_0$

$$d(f_n(z), f_m(z)) \leq \sup\{d(f_n(x), f_m(x)) : \ x \in X\} < \varepsilon \, . \tag{15}$$

Por las Observación 6.2 concluimos que existe $f : X \to Y$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a f. Sea $\varepsilon > 0$ fijo: usando nuevamente la hipótesis existe $n_0 \geq 1$ tal que si m, $n \geq n_0$ vale la Eq. (15). Recordemos que como la función $Y \ni y \mapsto d(y, y_0)$ es una función continua (para todo $y_0 \in Y$ fijo) entonces, si $z \in X$ y $n \geq n_0$:

$$d(f(z), f_n(z)) \;=\; d(\lim_{m\to\infty\,,\, m\geq m_0} f_m(z), f_n(z)) = \lim_{m\to\infty\,,\, m\geq m_0} \underbrace{d(f_m(z), f_n(z))}_{<\varepsilon} \leq \varepsilon$$

Como $z \in X$ era arbitrario, concluimos que si $n \geq n_0$ entonces

$$\sup\{d(f(x), f_n(x)) : \ x \in X\} \leq \varepsilon \, .$$

Notemos que los hechos anteriores muestran que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. $\square$

Definición 6.8. Sea X un conjunto y consideremos un espacio vectorial dotado de una norma $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ (el ejemplo es más relevante para nosotros es: $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ con la norma euclídea). Consideramos la métrica $d(u,v) = \|u - v\|$, para $u, v \in \mathbb{V}$.

Sean $f : X \to \mathbb{V}$, $f_n : X \to \mathbb{V}$ funciones, $n \geq 1$. En este caso, para $n \geq 1$ podemos considerar la suma parcial $s_n : X \to \mathbb{V}$ dada por

$$s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \in \mathbb{V} \quad \text{para} \quad x \in X\,,$$

donde la sumatoria denota la operación suma en el espacio vectorial (suma de vectores). Decimos que

1. la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge puntualmente a f si $(s_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a f, es decir:

   para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(x,\varepsilon) \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $\|s_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

2. la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente a f si $(s_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f, es decir:

   para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $\sup\{\|s_n(x) - f(x)\| \ : \ x \in X\} < \varepsilon$.

$\triangle$

Teorema 6.9 (Criterio de Weierstrass para series de funciones)**.** *Sea X un conjunto, $f_n : X \to \mathbb{R}^k$ función, $n \geq 1$. Supongamos que para cada $n \geq 1$ existe $M_n \geq 0$ tal que*

1. $\|f_n(x)\| \leq M_n$, *para* $x \in X$, $n \geq 1$;
2. $\sum_{n\geq 1} M_n < \infty$.

Entonces existe $f : X \to \mathbb{R}^k$ tal que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente a f.

Demostración. Veamos que la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\geq 1}$, $s_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) \in \mathbb{R}^k$, $x \in X$, es uniformemente de Cauchy. Para eso, fijamos un $\varepsilon > 0$: como la serie del ítem 2 converge, existe $n_0 \geq 1$ tal que para $m \geq n \geq n_0$ vale que $\sum_{j=n+1}^m M_j < \varepsilon/2$. En este caso, si $m \geq n \geq n_0$ y $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned} d(s_m(x), s_n(x)) &= \|s_m(x) - s_n(x)\| = \|\sum_{j=1}^{m} f_j(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\| = \|\sum_{j=n+1}^{m} f_j(x)\| \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{m} \|f_j(x)\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Como $x \in X$ era arbitario, concluimos que si $m \geq n \geq n_0$ entonces

$$\sup\{d(s_m(x), s_n(x)) : \ x \in X\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon\,.$$

Lo anterior muestra que sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\geq 1}$, es uniformemente de Cauchy. Por el Teorema 6.7 (usando que $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ es EM completo) concluimos que existe $f : X \to \mathbb{R}^k$ tal que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente a f, por definición. $\square$

6.2 Convergencia uniforme

Obs 6.10. En lo que sigue vamos a usar el siguiente hecho: si (Y, d) es espacio métrico y $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones en Y que convergen a $a \in Y$ y $b \in Y$ respectivamente, entonces

$$d(a, b) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)\,.$$

(ya hemos usado este tipo de afirmaciones). En efecto: dado $\varepsilon > 0$ entonces existe $n_0 \geq 1$ suficientemente grande tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(a, a_n)$, $d(b, b_n) < \varepsilon/2$. Así, si $n \geq n_0$, usando desigualdad triangular (varias veces) vemos que

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, b) < d(a_n, b_n) + \varepsilon\,,$$

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) < d(a, b) + \varepsilon\,.$$

Las desigualdades anteriores muestran que $|d(a, b) - d(a_n, b_n)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$, que prueba nuestra afirmación.

De forma similar, si (X, d_X) es EM, $E \subset X$, $x \in E'$ y $f,\ g : E \to Y$ son tales que

$$\lim_{t\to x} f(t) = a \quad \text{ y } \quad \lim_{t\to x} g(t) = b \implies \exists \lim_{t\to x} d(f(t), g(t)) = d(a, b)\,.$$

Esta última afirmación es un ejercicio (sugerencia: se puede usar la caracterización de la existencia de límite con sucesiones que hemos visto en un capítulo anterior, junto con la primer parte de la observación). $\triangle$

Teorema 6.11. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) EM's, tales que (Y, d_Y) es completo, sea $E \subseteq X$ y $x \in E'$. Sean $f : E \to Y$, $f_n : E \to Y$ funciones, $n \geq 1$. Supongamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en E: si suponemos además que existe* $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n \in Y$ *para* $n \geq 1$ *entonces existe* $\lim_{n\to\infty} A_n = A \in Y$*. Además, se verifica:*

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{t\to x} f(t) = A = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t)\,.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$: como $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente convergente, entonces es uniformemente de Cauchy: así, existe $n_0 \geq 1$ tal que si n, $m \geq n_0$ entonces $\sup\{d_Y(f_n(z), f_m(z)) :\ z \in X\} < \varepsilon$. Usando propiedades de la función distancia y el hecho de que $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n \in Y$, $n \geq 1$, vemos que: si n, $m \geq n_0$ entonces

$$d_Y(A_n, A_m) = d_Y(\lim_{t\to x} f_n(t), \lim_{t\to x} f_m(t)) = \lim_{t\to x} \underbrace{d(f_n(t), f_m(t))}_{<\varepsilon} \leq \varepsilon\,,$$

donde el hecho de que los límites se *puedan sacar* fuera de la función distancia es una consecuencia de la Observación 6.10. Así, la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en (Y, d_Y): como este es un EM completo, existe $A \in Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Usando la desigualdad triangular para la distancia (dos veces) tenemos que si $n \geq 1$ y $t \in E$:

$$d_Y(f(t), A) = d_Y(f(t), f_n(t)) + d_Y(f_n(t), A_n) + d_Y(A_n, A)\,. \tag{16}$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, sea $n_1 \geq 1$ tal que $d_Y(f(t), f_n(t)) \leq \varepsilon/3$, para todo $t \in E$ y para todo $n \geq n_1$ (que existe porque $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en E); por otro lado, sea $n_2 \geq 1$ tal que $d_Y(A_n, A) \leq \varepsilon/3$, para todo $n \geq n_2$. Sea $n_3 \geq \max\{n_1,\ n_2\}$ fijo: en este caso, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in E$ es tal que $0 < d_X(x, t) < \delta$ entonces $d(f_{n_3}(t), A_{n_3}) \leq \varepsilon/3$. En este caso, usando la Eq. (16) con $n = n_3$ vemos que si $t \in E$ es tal que $0 < d_X(x, t) < \delta$ entonces $d_Y(f(t), A) \leq \varepsilon$. Lo anterior muestra que existe $\lim_{t\to x} f(t) = A$. $\square$

Teorema 6.12. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) EM's y sean $f_n : X \to Y$ funciones continuas, $n \geq 1$. Si $f : X \to Y$ es función tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f, entonces f es función continua.*

Demostración. Veamos que f es una función continua en $x \in X$: si $x \in X$ es punto aislado no hay nada que probar. Si $x \in X'$ entonces, por hipótesis existe $\lim_{t\to x} f_n(t) = f_n(x)(= A_n)$, $n \geq 1$ (porque f_n es continua en $x \in X'$). Por el teorema anterior existe $\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (donde la última igualdad es porque la convergencia uniforme implica la convergencia puntual). Lo anterior muestra que f es continua en $x \in X'$. Entonces f es continua en todo punto de su dominio (y luego es continua a secas!). $\square$

Ejemplo 6.13. Consideremos $X = [0, 1]$ con la topología usual y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas; más aún, esta sucesión converge puntualmente a la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$, $x \in [0, 1)$ y $f(1) = 1$ (verificar!). En este caso, como la función límite puntual no es continua, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ no converge uniformemente a f (de hecho, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ no es uniformemente de Cauchy! porqué?) $\triangle$

Teorema 6.14 (de Dini)**.** *Sea (X, d) EM compacto y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ continua, $n \geq 1$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que*

1. *$(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f puntualmente en X;*
2. *$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $x \in X$, $n \geq 1$.*

En este caso $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f.

Demostración. En la prueba vamos a usar la siguiente propiedad de intersección finita (pif) en compactos: si $\{K_i\}_{i\in I}$ es tal que $K_i \subset X$ es compacto (en nuestro caso sii K_i es cerrado en X) y $\cap_{i\in F} K_i \neq \emptyset$ para todo $F \subseteq I$ conjunto finito y no vacío, entonces $\cap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.

Notemos que como la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ es decreciente entonces $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) \leq f_n(x)$, $n \geq 1$. Sea $\varepsilon > 0$: en este caso queremos verificar que existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Para esto, definimos $g_n = f_n - f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua, $n \geq 1$. Con esta notación, vemos que basta probar que existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Notemos que por construcción $g_n \geq g_{n+1}$, $n \geq 1$ (es decir $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de funciones continuas). Además, por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, $x \in X$. Definamos

$$K_n = \{x \in X : g_n(x) \geq \varepsilon\} = g_n^{-1}([\varepsilon, +\infty)) \subseteq X \quad \text{para} \quad n \geq 1\,.$$

Como g_n es continua (y $[\varepsilon, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado) vemos que $K_n \subseteq X$ es cerrado, y luego compacto, $n \geq 1$. Además, si $x \in K_{n+1}$ entonces $\varepsilon \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ que muestra que $x \in K_n$; así, $K_{n+1} \subseteq K_n$, $n \geq 1$. Así, si $F \subseteq \mathbb{N}^*$ es conjunto finito y no vacío, $n = \max F \in \mathbb{N}^*$ vemos que

$$\cap_{j\in F} K_j = K_n\,.$$

De esta forma, si suponemos que $K_n \neq \emptyset$, $n \geq 1$, entonces $\cap_{j\in F} K_j \neq \emptyset$, para todo $F \subseteq \mathbb{N}^*$ finito y no vacío. Por la pif, concluimos que $\cap_{n\geq 1} K_n \neq \emptyset$: pero si $x \in \cap_{n\geq 1} K_n$ entonces $g_n(x) \geq \varepsilon$, $n \geq 1$, en contra del hecho de que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Esta contradicción surge de suponer que $K_n \neq \emptyset$, $n \geq 1$. Ahora vemos que debe existir $n_0 \geq 1$ tal que $K_{n_0} = \emptyset$; en este caso, si $n \geq n_0$ vemos que $K_n \subseteq K_{n_0} = \emptyset$ de forma que si $x \in X$, $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$. Por la primer parte de la prueba, esto muestra que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. $\square$

Obs 6.15. En el teorema de Dini, la hipótesis de que X es compacto es esencial. En efecto, consideramos el siguiente ejemplo: sea $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{1}{xn+1}$, $x \in X$. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de funciones continuas, que converge puntualmente a la función nula $0 : X \to \mathbb{R}$, que es continua. Sin embargo, la sucesión no converge uniformemente a la función nula (verificar!) $\triangle$

Obs 6.16. Consideramos sucesiones $(a_{i,j})_{i\geq 1}$ en $\mathbb{R}$, para $1 \leq j \leq m$ (es decir, la primer sucesión es $(a_{i,1})_{i\geq 1}$, la segunda es $(a_{i,2})_{i\geq 1}$; la m-ésima sería $(a_{i,m})_{i\geq 1}$). Supongamos que las series correspondientes convergen

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i\geq 1} a_{i,j} = A_j \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq m\,.$$

En este caso podemos considerar la sucesión $(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j})_{i\geq 1}$. En este caso, la serie correspondiente también converge: si calculamos la sucesión de sumas parciales, usando la asociatividad y conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i\geq 1} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{m} A_j \,,$$

donde la convergencia indicada es consecuencia de nuestra hipótesis inicial (verificar!). Podemos re escribir le hecho anterior como la identidad

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$$

En el caso de una *sucesión* de sucesiones $(a_{i,j})_{i\geq 1}$, para $j \geq 1$, el análisis es más sutil. El siguiente es un resultado relacionado con el estudio de este caso. $\triangle$

Teorema 6.17 (Fubini para series dobles)**.** *Sea $(a_{i,j})_{i,j\geq 1}$ una sucesión doble en $\mathbb{R}$. Supongamos que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = b_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \textit{para} \quad i \geq 1\,.$$

Más aún, supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge en $\mathbb{R}$. Entonces, para cada $j \geq 1$ se tiene que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$ converge en $\mathbb{R}$ y vale que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

Demostración. Definamos $x_0 = 0$ y $x_n = 1/n$, $n \geq 1$. Sea $E = \{x_n : \ n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}$ con la métrica usual (como subespacio de $\mathbb{R}$). Entonces $\mathrm{Ais}(E) = \{x_n : \ n \geq 1\}$ y $E' = \{0\} = \{x_0\}$, con $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Para $i \geq 1$ definamos $f_i : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(x_n) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} & \text{si } \ n = 0; \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} & \text{si } \ n \geq 1\,. \end{cases}$$

Notemos que los valores $f_i(x_0)$ están bien definidos porque las series $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ son absolutamente convergentes por hipótesis, para $i \geq 1$. Notemos que $f_i : E \to \mathbb{R}$ es función continua, para cada $i \geq 1$.

Finalmente, sea $g : E \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$, para $x \in E$. Entonces g es una función bien definida porque $|f_i(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = b_i$, con lo que $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$ (lo anterior dice que la serie que define a $g(x)$ es absolutamente convergente! para todo $x \in E$). Más aún, los hechos anteriores nos permiten aplicar el criterio de Wierstrass (Teorema 6.9) para la convergencia uniforme de series de funciones: en efecto, $|f_i(x)| \leq b_i$, $x \in E$, junto con el hecho de que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$ garantizan que la sucesión de sumas parciales $s_N = \sum_{i=1}^{N} f_i$, $N \geq 1$, converge uniformemente a g (verificar en detalle). Como cada función $s_N = \sum_{i=1}^{N} f_i$ es continua (porque suma de continuas es continua!), la convergencia uniforme a g en E implica que g resulta continua en E (por el Teorema 6.12).

Los hechos anteriores muestran que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)\,,$$

donde hemos usado que g es continua en x_0 y que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Por otro lado, notemos que para todo $j \geq 1$

$$|a_{i,j}| \leq b_i \implies \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty\,.$$

Así, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$ converge en $\mathbb{R}$ para todo $j \geq 1$. Por la Observación 6.16 vemos que

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j\geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}\,.$$

□

Definición 6.18. Sea (X, d) EM. En este caso definimos:

1. $C_b(X, \mathbb{R}^k) = \{\ f : X \to \mathbb{R}^k :$ continua y acotada $\}$. En este caso, existe $r > 0$ tal que

$$f(X) \subseteq B_r(0) = \{z \in \mathbb{R}^k : \|z\| < r\} \implies 0 \leq \|f(x)\| < r \quad \text{para} \quad x \in X\,.$$

2. Si $f \in C_b(X, \mathbb{R}^k)$ entonces definimos

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| :\ x \in X\ \} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$

   $\|f\|_\infty$ está bien definida (ver ítem 1) y es llamada norma supremo (ó norma infinito).

△

Obs 6.19. Con la notación de la definición anterior, notemos que (ejercicios!)

1. $C_b(X, \mathbb{R}^k)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y la acción escalar puntual: es decir, si $f,\, g \in C_b(X, \mathbb{R}^k)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f + g : X \to \mathbb{R}^k$ satisface $\alpha f + g \in C_b(X, \mathbb{R}^k)$ (verificar).

2. Si $f,\, g \in C_b(X, \mathbb{R}^k)$ entonces $\langle f,\, g\rangle : X \to \mathbb{R}$ satisface $\langle f,\, g\rangle \in C_b(X, \mathbb{R})$.

3. Dada $f,\, g \in C_b(X,\mathbb{R}^k)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

   (a) $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $f = 0$;

   (b) $\|\alpha\, f\|_\infty = |\alpha|\, \|f\|_\infty$;

   (c) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

   (d) $\|\langle f,\, g\rangle\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

Los hechos anteriores muestran que $\|\cdot\|_\infty : C_b(X,\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una norma en el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $C_b(X,\mathbb{R}^k)$. En particular, podemos considerar la métrica

$$d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty = \sup\{\|f(x) - g(x)\| : \ x \in X\} \quad \text{para} \quad f,\, g \in C_b(X,\mathbb{R}^k)\,.$$

Así, dada una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en $C_b(X,\mathbb{R}^k)$ y $f \in C_b(X,\mathbb{R}^k)$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $(C_b(X,\mathbb{R}^k), d_\infty)$ si y solo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. En este sentido, d_∞ es llamada la *métrica de la convergencia uniforme.* △

Teorema 6.20. *Sea (X,d) EM. El espacio métrico $(C_b(X,\mathbb{R}^k), d_\infty)$ es completo.*

Demostración. Consideremos $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(C_b(X,\mathbb{R}^k), d_\infty)$. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n,\, m \geq n_0$ entonces

$$d_\infty(f_n, f_m) = \sup\{\|f_n(x) - f_m(y)\| : \ x \in X\} = \sup\{d_{\mathbb{R}^k}(f_n(x), f_m(y)) : \ x \in X\} < \varepsilon\,.$$

Lo anterior muestra que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy entre los espacios métricos (X,d) y $(\mathbb{R}^k, d_{\mathbb{R}^k})$. Como $(\mathbb{R}^k, d_{\mathbb{R}^k})$ es completo, el Teorema 6.7 muestra que existe una función $f : X \to \mathbb{R}^k$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. Por el Teorema 6.12 vemos que $f : X \to \mathbb{R}^k$ resulta una función continua. Más aún, sea $n_0 \geq 1$ tal que para $n \geq n_0$,

$$\sup\{d_{\mathbb{R}^k}(f_n(x), f(x)) : \ x \in X\} < 1\,.$$

En este caso,

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x)\| \leq 1 + \|f_{n_0}\|_\infty \quad \text{para} \quad x \in X\,.$$

Lo anterior muestra que $\|f\|_\infty \leq 1 + \|f_{n_0}\|_\infty < \infty$. Así, $f \in C_b(X,\mathbb{R}^k)$; finalmente, como $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f, vale que $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$, por definición (verificar!). □

Teorema 6.21 (Convergencia Uniforme e integración)**.** *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{R}([a,b])$ (funciones integrables Riemann) y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx\,.$$

Demostración. Notemos que en este caso, f es función acotada: en efecto, sea $n_1 \geq 1$ tal que si $n \geq n_1$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < 1$, para $x \in [a,b]$. Como $f_{n_1} \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces resulta acotada y existe $M > 0$ tal que $|f_{n_1}(x)| \leq M$, para $x \in [a,b]$: entonces, $|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leq 1 + M$, para $x \in [a,b]$.

Veamos que f es integrable: para eso, sea $\varepsilon > 0$: por hipótesis existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\sup\{|f(x) - f_n(x)| : \ x \in [a,b]\} < \varepsilon$. Así, si $n \geq n_0$ entonces

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in [a,b] \,. \tag{17}$$

Fijemos $n \geq n_0$: como $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces existe $P = \{x_0, \ldots, x_m\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $U(P, f_n) - L(P, f_n) \leq \varepsilon$. Notemos que si consideramos

$$M_i(n) = \sup\{f_n(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad m_i(n) = \inf\{f_n(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ , \ 1 \leq i \leq n$$

y de forma similar

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ , \ 1 \leq i \leq n$$

entonces, la desigualdad en la Eq. (17) muestra que

$$m_i(n) - \varepsilon \leq m_i \quad \text{y} \quad M_i \leq M_i(n) + \varepsilon \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq m \,.$$

Si multiplicamos las desigualdades anteriores por $\Delta_i = x_i - x_{i-1} > 0$ (de forma que las desigualdades se preservan) y sumamos, vemos que

$$L(P, f_n) - \varepsilon(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P, f_n) + \varepsilon(b-a)$$

donde usamos que $\sum_{i=1}^n \Delta_i = b - a$. Lo anterior muestra que

$$U(P, f) - L(P, f) \leq 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(2(b-a) + 1) \,.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la estimación anterior muestra que $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Así, si $n \geq n_0$ entonces $|f - f_n| \in \mathcal{R}([a,b])$ (por resultados previos) y $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, para $x \in [a,b]$: en particular, vemos que

$$|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f_n(x)\ dx| = |\int_a^b (f(x) - f_n(x))\ dx| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\ dx \leq \varepsilon\,(b-a) \,.$$

$\square$

Ejemplo 6.22. Un pregunta natural es si el resultado anterior puede valer asumiendo la convergencia puntual (que es una hipótesis más débil). El siguiente ejemplo muestra que no.

Recordemos que el conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ es numerable. En este caso, podemos considerar una función biyectiva $h : \mathbb{N}^* \to A$. Vamos a considerar los conjuntos $A_n = \{h(1), \ldots, h(n)\} \subseteq A$, $n \geq 1$. Notemos que $A = \cup_{n \geq 1} A_n$.

Por un lado, la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ si $x \in A$, $f(x) = 0$ si $x \notin A$ es tal que $f \notin \mathcal{R}([a,b])$ (ejercicio!). Por otro lado, si consideramos la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = 1$ si $x \in A_n$, $f_n(x) = 0$ si $x \notin A_n$ entonces $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ (porque f_n es continua, salvo en una cantidad finita de puntos: los de A_n!). Además, es sencillo verificar que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ converge puntualmente a f. Así, el límite puntual de esta sucesión de funciones integrables Riemann no resulta integrable Riemann. $\triangle$

Teorema 6.23. *Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{R}([a,b])$ (funciones integrables Riemann) y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformemente a f entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x)\ dx \,.$$

Demostración. Para $N \geq 1$ consideramos $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \in \mathcal{R}([a,b])$. Por hipótesis, la sucesión $(s_N)_{N\geq 1}$ converge uniformemente a f. Por el Teorema anterior y las propiedades (de linealidad) de la integral concluimos que $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\ dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)\ dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\ dx\,.$$

En particular, la serie $\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\ dx$ converge. □

Con la notación del teorema anterior, si escribimos la identidad $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ (en el sentido de la convergencia uniforme de la sucesión de sumas parciales que mencionamos antes) entonces el resultado se puede escribir como

$$\int_a^b \left(\sum_{n\geq 1} f_n \right)\ dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n\ dx\,.$$

Teorema 6.24 (Convergencia uniforme y diferenciación)**.** *Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), $n \geq 1$. Supongamos que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ y que la sucesión $(f_n')_{n\geq 1}$ converge uniformemente en (a,b). En este caso, existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *$(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$*
2. *f es diferenciable en (a,b) y $(f_n')_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f' en (a,b).*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_0 \geq 1$ tal que $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon/2$ y $|f_n'(t) - f_m'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, para $t \in (a,b)$, n, $m \geq n_0$. Dados n, $m \geq n_0$, $x, t \in [a,b]$ podemos aplicar el teorema del valor medio a $f_n - f_m$ en el intervalo cerrado determinado por x y t, y concluir que

$$|(f_n - f_m)(t) - (f_n - f_m)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, |t - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ , \quad n,\, m \geq n_0\ ,\ x, t \in [a,b]\,. \tag{18}$$

Entonces, notemos que si n, $m \geq n_0$,

$$|(f_n - f_m)(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon\ ,\ x \in [a,b]\,.$$

La estimación anterior muestra que $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente de Cauchy en $[a,b]$. Por un resultado previo, sabemos que existe una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. En particular, f es continua en $[a,b]$.

Fijemos $x \in (a,b)$ y definamos

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad , \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad , \quad t \in [a,b] \setminus \{x\}\,.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$, $t \in [a,b] \setminus \{x\}$; por otro lado, $\lim_{t\to x} \phi_n(t) = f_n'(x)$, $n \geq 1$. Además, la Eq. (18) muestra que

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{si} \quad n,\, m \geq n_0\ ,\ t \in [a,b] \setminus \{x\}$$

de forma que las restricciones $(\phi_n|_{[a,b]\setminus\{x\}})_{n\geq 1}$ son uniformemente de Cauchy. Entonces $(\phi_n|_{[a,b]\setminus\{x\}})_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $\phi|_{[a,b]\setminus\{x\}}$ (porque?). Como $x \in ([a,b] \setminus \{x\})'$ entonces, por el Teorema 6.11 vemos que

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \phi(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty}\ \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Así, existe $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in (a,b)$. Finalmente, notemos que como $(f_n')_{n\geq 1}$ converge uniformemente, entonces debe converge uniformemente a su límite puntual (que es f'). □

6.3 Familias equicontinuas de funciones

Definición 6.25. Sea E un conjunto y sea $\mathcal{F} \subseteq \{f : E \to \mathbb{R}$, función$\}$. Decimos que

1. $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada si para cada $x \in E$ existe $M_x \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M_x$, para toda $f \in \mathcal{F}$.

2. $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in E$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

$\triangle$

Obs 6.26. Sea (K, d) EM compacto; si $C(K, \mathbb{R}) = \{f : K \to \mathbb{R} \ , f$ es continua$\}$ entonces $C(K, \mathbb{R}) = C_b(K, \mathbb{R})$ (si $f \in C(K, \mathbb{R})$ entonces la función continua $|f|$ alcanza su valor máximo en el compacto K). En este caso podemos considerar la métrica d_∞ en $C(K, \mathbb{R})$ (la métrica de la convergencia uniforme). Un problema interesante es determinar cuales son los subconjuntos $\mathcal{F} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ que son compactos con respecto a la métrica d_∞. En lo que sigue veremos algunas nociones relacionadas con este problema.

Definición 6.27. Sea (X, d) EM y sea $\mathcal{F} \subseteq \{f : X \to \mathbb{R}$, función $\}$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en X si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, para toda $f \in \mathcal{F}$. $\triangle$

Obs 6.28. Con la notación de la definición anterior, vemos que si $\mathcal{F}$ es familia equicontinua de funciones entonces cada $f \in \mathcal{F}$ es una función uniformemente continua, y en particular continua. $\triangle$

Teorema 6.29. *Sea (K, d) EM compacto y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $C(K, \mathbb{R}) = C_b(K, \mathbb{R})$. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en K entonces $\mathcal{F} = \{f_n : \ n \geq 1\} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ es una familia equicontinua en K.*

Demostración. Como la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en K entonces es uniformemente de Cauchy. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Como K es compacto, cada f_i es uniformemente continua, $1 \leq i \leq n_0$: así, existe $\delta_i > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_i$ entonces $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon$, para $1 \leq i \leq n_0$. Sea $\delta = \min\{\delta_i : \ 1 \leq i \leq n_0\} > 0$. En este caso, si $d(x, y) < \delta \leq \delta_i$ entonces $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon$, para $1 \leq i \leq n_0$. Por otro lado, si $n \geq n_0$ entonces

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_n(y) - (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y))| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \\ &\leq |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + |f_n(y) - f_{n_0}(y)| + \varepsilon \leq 3\varepsilon \,. \end{aligned}$$

Las estimaciones anteriores muestran que la familia $\mathcal{F} = \{f_n : \ n \geq 1\}$ es equicontinua (verificar con detalle). $\square$

Obs 6.30. Consideremos la siguiente situación: para cada $m \geq 0$, temos una sucesión $(a_{n,m})_{n\geq 1}$ de elementos en algún conjunto A.

Vamos a suponer que para todo $m \geq 0$, $(a_{n,m+1})_{n\geq 1}$ es subsucesión de $(a_{n,m})_{n\geq 1}$. En este caso, para cada $m \geq 0$ existe una función estrictamente creciente $h_m : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que

$$a_{n,m+1} = a_{h_m(n),m} \quad \text{para} \quad n \geq 1 \,.$$

En esta situación podemos construir la sucesión *diagonal* $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_n = a_{n,n}$, $n \geq 1$: es decir, el n-ésimo término de la sucesión diagonal es el n-ésimo término de la n-ésima sucesión !

Veamos que dado $m \geq 0$ entonces $(a_n)_{n\geq \max\{1,m\}}$ es subsucesión de $(a_{n,m})_{n\geq 1}$. Para eso, fijado m, vamos a tener que construir una función estrictamente creciente $g_m : \{n \in \mathbb{N}^* : n \geq \max\{1,m\}\} \to \mathbb{N}^*$ tal que

$$a_n = a_{n,n} = a_{g_m(n),m} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}^*\,,\, n \geq \max\{1,m\}\,.$$

Para ver que existe una función g_m como antes, notamos que si $m \geq 1$ entonces $a_m = a_{m,m}$, de forma que $g_m(m) = m$; si $n > m$, usando las funciones h_k, $m \leq k \leq n-1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n,n} = a_{h_{n-1}(n),n-1} = a_{h_{n-2}(h_{n-1}(n)),n-2} = a_{h_{n-2}\circ h_{n-1}(n),n-2} \\ &= \ldots = a_{h_{n-(n-m)}\circ h_{n-(n-m)+1}\circ\ldots\circ h_{n-1}(n),n-(n-m)} = a_{g_m(n),m} \end{aligned}$$

donde

$$g_m(n) = h_m \circ h_{m+1} \circ \ldots \circ h_{n-1}(n) \quad \text{para} \quad n > m\,.$$

Así queda definida la función $g_m : \{n \in \mathbb{N}^* : \ n \geq m\} \to \mathbb{N}^*$ tal que $a_n = a_{n,n} = a_{g_m(n),m}$, para $n \geq m$. Para completar el argumento, veamos que g_m es estrictamente creciente: si $m < r < s$ entonces usando que las h_j's son estrictamente crecientes,

$$m \leq h_{n-1}(m) < h_{n-1}(r) < h_{n-1}(s) \implies m < h_{n-2}\circ h_{n-1}(r) < h_{n-2}\circ h_{n-1}(s) \implies \ldots$$

$$m < h_m \circ h_{m+1} \circ \ldots \circ h_{n-1}(r) < h_m \circ h_{m+1} \circ \ldots \circ h_{n-1}(s)\,.$$

La última desigualdad se puede escribir como $m < g_m(r) < g_m(s)$. △

Obs 6.31. Sea E un conjunto y sean r_n, $s_n : E \to \mathbb{R}$ funciones, $n \geq 1$. Supongamos que $(r_n)_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $(s_n)_{n\geq 1}$: entonces existe una función estrictamente creciente $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $r_n = s_{h(n)}$, $n \geq 1$. Entonces, la sucesión numérica $(r_n(x))_{n\geq 1}$ es una subsucesión de la sucesión numérica $(s_n(x))_{n\geq 1}$, para $x \in E$. En efecto, basta notar que la misma función h de antes sirve: como $r_n = s_{h(n)}$ (identidad de funciones) entonces $r_n(x) = s_{h(n)}(x)$, (identidad numérica) para todo $n \geq 1$ (y todo $x \in E$!). △

Teorema 6.32. *Sea E un conjunto numerable y sea $f_n : E \to \mathbb{R}$ función, $n \geq 1$. Supongamos que la familia $\mathcal{F} = \{f_n : \ n \geq 1\}$ está puntualmente acotada en E. Entonces existe una subsucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ tal que: para todo $x \in E$ se tiene que la sucesión $(g_n(x))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Como E es un conjunto numerable, podemos numerar los elementos de $E = \{x_i : \ i \geq 1\}$. Definimos las funciones $f_{n,0} = f_n$, $n \geq 1$ y construimos la sucesión $(f_{n,0})_{n\geq 1}$.

Como la familia $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada, entonces la sucesión $(f_{n,0}(x_1))_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Por un resultado de Weierstrass, concluimos que la sucesión tiene una subsucesión convergente; es decir, existe una función estrictamente creciente $h_1 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $(f_{h_1(n),0}(x_1))_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$.

En particular, la función h_1 determina la subsucesión $(f_{h_1(n),0})_{n\geq 1}$ de la sucesión $(f_{n,0})_{n\geq 1}$. Para simplificar la notación, renombramos $f_{h_1(n),0} = f_{n,1}$ para $n \geq 1$. En resumen (renombrando las cosas) hemos constuido $(f_{n,1})_{n\geq 1}$ que es una subsucesión de $(f_{n,0})_{n\geq 1}$, de forma que la sucesión numérica $(f_{n,1}(x_1))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$.

Notemos que la observación anterior muestra que, en particular, la familia $\{f_{n,1} : n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$ está puntualmente acotada. Entonces podemos volver a empezar partiendo de $(f_{n,1})_{n\geq 1}$ y $x_2 \in E$. Repetimos el argumento anterior y construimos una sucesión $(f_{n,2})_{n\geq 1}$ que resulta una subsucesión de $(f_{n,1})_{n\geq 1}$ y tal que $(f_{n,2}(x_2))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$.

De esta forma, para cada $m \geq 1$ podemos construir una sucesión $(f_{n,m})_{n\geq 1}$ tal que

1. $(f_{n,m+1})_{n\geq 1}$ es subsucesión de $(f_{n,m})_{n\geq 1}$, para $m \geq 0$.

2. $(f_{n,m}(x_m))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$, para cada $m \geq 1$.

En este caso podemos definir $g_n = f_{n,n}$ para $n \geq 1$. Usando el ítem 1. y la Observación 6.30, vemos que $(g_n)_{n\geq \max\{1,m\}}$ es subsucesión de $(f_{n,m})_{n\geq 1}$, para cada $m \geq 0$. En particular, $(g_n)_{n\geq 1}$ es subsucesión de $(f_{n,0})_{n\geq 1} = (f_n)_{n\geq 1}$.

En particular, usando el hecho anterior y la Observación 6.31 concluimos que: si $m \geq 1$ entonces $(g_n(x_m))_{n\geq m}$ es una subsucesión de la sucesión convergente $(f_{n,m}(x_m))_{n\geq 1}$ (donde también usamos el ítem 2.). Este último hecho garantiza que la sucesión $(g_n(x_m))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$, para todo $m \geq 1$. Así, si $x \in E$ (es arbitrario) entonces existe $m \geq 1$ tal que $x = x_m$ y entonces la sucesión $(g_n(x))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$. De esta forma, la subsucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ tiene las propiedades requeridas. □

Definición 6.33. Sea (X, d) EM. Decimos que (X, d) es separable si existe un conjunto $D \subseteq X$ a lo sumo numerable y denso (es decir, $\overline{D} = X$). △

Proposición 6.34. *Sea (K, d) EM compacto. Entonces (K, d) es separable.*

Demostración. Sea $n \geq 1$; entonces $\{B_{1/n}(x)\}_{x\in K}$ es un cubrimiento de K por abiertos. En este caso, existe un subconjunto finito $F_n \subseteq K$ tal que $\{B_{1/n}(x)\}_{x\in F_n}$ es un subcubrimiento (finito) de K. Consideremos $D = \cup_{n\geq 1} F_n$; entonces D es un conjunto a lo sumo numerable. Veamos que D es denso en K: en efecto, sea $x \in K$ y sea $\varepsilon > 0$: en este caso, queremos probar que $D \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, que muestra que $x \in \overline{D}$. Para eso, elegimos $n \geq 1$ tal que $1/n < \varepsilon$ y notamos que como $\{B_{1/n}(x)\}_{x\in F_n}$ es un cubrimiento de K, existe $y \in F_n \subseteq D$ tal que $x \in B_{1/n}(y)$. Así, $d(x, y) < 1/n < \varepsilon$ que muestra que $y \in D \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Como $x \in K$ era arbitrario, vemos que $K = \overline{D}$. □

Corolario 6.35. *Sea (X, d) EM tal que existe una sucesión $(K_n)_{n\geq 1}$ tal que $K_n \subseteq X$ es compacto, $n \geq 1$ y $\cup_{n\geq 1} K_n = X$ (en este caso decimos que X es σ-compacto). Entonces X es separable.*

Demostración. Sea $D_n \subseteq K_n$ subconjunto a lo sumo numerable y denso en K_n, $n \geq 1$. Entonces $D = \cup_{n\geq 1} D_n \subseteq X$ es un conjunto a lo sumo numerable y denso en X (los detalles son ejercicio). □

Como aplicación del corolario anterior, notemos que $\mathbb{R}^k = \cup_{n\geq 1} \overline{B}_n(0)$, donde $\overline{B}_n(0) = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq n\}$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual, porque es cerrado y acotado. En este caso, deducimos que $\mathbb{R}^k$ (con la métrica usual) es separable.

Obs 6.36. En el contexto de espacios métricos, la propiedad de ser separable es *hereditaria*: es decir, si (X, d) es EM separable y $E \subseteq X$ entonces el subespacio métrico (E, d_E) es separable también. En efecto, en este caso existe $D \subseteq X$ conjunto a lo sumo numerable y tal que $\overline{D} = X$. Si D es finito, entonces X es finito (ejercicio) y es claro que $E \subseteq X$ es también finito, y claramente separable. Suponemos entonces que $D = \{x_n : n \geq 1\}$ es numerable.

Si $E = \emptyset$ entonces $\emptyset$ es un conjunto a lo sumo numerable y denso en $E = \emptyset$. Supongamos entonces que $E \neq \emptyset$ y sea $e \in E$ un elemento fijo. Para cada par $n,\, m \geq 1$ definimos

$$e_{n,m} = \begin{cases} e_{n,m} \in B_{1/m}(x_n) \cap E & \text{si } \ B_{1/m}(x_n) \cap E \neq \emptyset; \\ \\ e & \text{si } \ B_{1/m}(x_n) \cap E = \emptyset\,. \end{cases}$$

En este caso, el conjunto $F = \{e_{n,m} :\ n,\, m \geq 1\} \subseteq E$ es a lo sumo numerable; además, se verifica que $\overline{F} = E$ en (E, d_E) (ejercicio). Esto muestra que (E, d_E) es separable. $\triangle$

Notemos que los hechos anteriores muestran, en particular, que si $A \subset \mathbb{R}^k$ es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^k$ entonces el subespacio métrico (A, d_A) (de $\mathbb{R}^k$ con la métrica usual) es separable es decir, admite un subconjunto denso y numerable. Este hecho suele ser muy útil.

Teorema 6.37. *Sea (K, d) EM compacto y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ sucesión en $C(K) = C_b(K, \mathbb{R})$. Supongamos que la familia $\mathcal{F} = \{f_n :\ n \geq 1\}$ es equicontinua y puntualmente acotada en K. Entonces*

1. *Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq M$, para $n \geq 1$;*
2. *Existe $(g_n)_{n\geq 1}$ subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge en $(C(K), d_\infty)$ a un función $g \in C(K)$.*

Demostración. Veamos 1.: como $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua, fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, para $n \geq 1$. Notemos que en este caso, $\{B_\delta(x)\}_{x\in K}$ es un cubrimiento de K por abiertos. Como K es compacto, existe un subconjunto finito $F \subseteq K$ tal que $\{B_\delta(x)\}_{x\in F}$ es un subcubrimiento de K. Así, si $x \in K$ entonces existe $p \in F$ tal que $x \in B_\delta(p)$ es decir, $d(p, x) < \delta$; en este caso si $n \geq 1$, $|f_n(x) - f_n(p)| < \varepsilon$ que muestra que

$$|f_n(x)| < |f_n(p)| + \varepsilon \leq \sup\{|f_m(p)| :\ m \geq 1\} + \varepsilon = M_p + \varepsilon\,,$$

donde hemos llamado $\sup\{|f_m(p)| :\ m \geq 1\} = M_p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y usado que la familia está puntualmente acotada para garantizar que M_p es un número real. Más aún, si definimos $M' = \max\{M_p :\ p \in F\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ entonces la desigualdad anterior muestra que

$$|f_n(x)| \leq M' + \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in K \implies \|f_n\|_\infty \leq M' + \varepsilon\ ,\ n \geq 1\,.$$

Finalmente, llamamos $M = M' + \varepsilon$ y notamos que verifica las propiedades del ítem 1.

Para verificar el ítem 2. notemos que como K es compacto, entonces resulta separable por la Proposición 6.34; así, existe $E \subseteq K$ conjunto a lo sumo numerable tal que $\overline{E} = K$. Si E es finito, entonces K es finito y el resultado se verifica de forma directa (ejercicio). Supongamos entonces que E es numerable. Por el Teorema 6.32 existe una subsucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ tal que la sucesión $(g_n(x))_{n\geq 1}$ es convergente en $\mathbb{R}$, para cada $x \in E$ (aquí usamos que E es numerable!). Veamos que $(g_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente de Cauchy en K: dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon$, $n \geq 1$ (aquí estamos usando que $\mathcal{F}$ es equicontinua y que $\mathcal{G} = \{g_n :\ n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$ también resulta equicontinua). En este caso notemos que

$$\{B_\delta(x)\}_{x\in E}$$

es un cubrimiento de K por abiertos (notemos que usamos a E como conjunto de índices). En efecto, si $z \in K$, como E es denso, existe $x \in B_\delta(z) \cap E$; en este caso, $x \in E$ y $z \in B_\delta(x)$. Como K es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq E$ tal que $\{B_\delta(x)\}_{x\in F}$ es un cubrimiento de K. Como $F \subseteq E$ entonces, para cada $p \in F$ existe un $n_p \geq 1$ tal que si $n,\, m \geq n_p$ entonces $|g_n(p) - g_m(p)| < \varepsilon$. Definimos $n_0 = \max\{n_p :\ p \in F\} \in \mathbb{N}^*$ y tomemos $m,\, n \geq n_0$ y $z \in K$: en este caso, existe $p \in F$ tal que $z \in B_\delta(p)$ de forma que

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g_m(z)| &= |g_n(z) - g_n(p) + g_n(p) - g_m(p) + g_m(p) - g_m(z)| \\ &\leq |g_n(z) - g_n(p)| + |g_n(p) - g_m(p)| + |g_m(p) - g_m(z)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon \end{aligned}$$

donde usamos la equicontinuidad para acotar el primer y tercer términos y el hecho de que $n,\, m \geq n_0 \geq n_p$ para acotar el segundo término. La estimación anterior muestra que

$$d_\infty(g_n, g_m) = \sup\{|g_n(z) - g_m(z)| :\ z \in K\} \leq 3\,\varepsilon \qquad \text{para} \qquad n,\, m \geq n_0\,.$$

Así, $(g_n)_{n\geq1}$ es uniformemente de Cauchy. Por los Teoremas 6.7 y 6.12 concluimos que existe $g \in C(K)$ tal que $(g_n)_{n\geq1}$ converge uniformemente a g. □

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema anterior.

Corolario 6.38. *Sea (K, d) EM compacto y sea $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ una familia equicontinua y puntualmente acotada de funciones. Si $(f_n)_{n\geq1}$ es una sucesión en $\mathcal{F}$ entonces admite una subsucesión convergente en la métrica d_∞.*

Demostración. Basta notar que $\mathcal{G} = \{f_n :\ n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ hereda las propiedades de ser puntualmente acotada y equicontinua de $\mathcal{F}$. □

Obs 6.39. Sea (K, d) EM compacto y sea $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ una familia equicontinua y puntualmente acotada de funciones. Supogangamos además que $\mathcal{F}$ es cerrada en el espacio métrico $(C(K), d_\infty)$. Entonces el corolario anterior muestra que toda sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge a un punto en $\mathcal{F}$ en el EM $(C(K), d_\infty)$. Esto hace recordar una propiedad que hemos probado sobre conjuntos compactos en EM: si (X, d) es EM y $Z \subseteq X$ es compacto, entonces toda sucesión en Z tiene una subsucesión que converge a un punto de Z en (X, d). Así, una familia $\mathcal{F}$ como la mencionada al comienzo de esta observación se comporta como si fuera un subconjunto compacto en el EM $(C(K), d_\infty)$. De hecho, $\mathcal{F}$ resulta compacta en este espacio métrico: este resultado se conoce como teorema de Arzelá-Ascoli. △

6.4 Teorema de aproximación de Weierstrass

En esta última sección del capítulo vamos a probar un teorema de aproximación de funciones continuas mediante polinomios que juega un papel muy importante en la teoría de aproximación de funciones. Comenzamos con un resultado de preparación.

Lema 6.40. *Para cada $n \geq 1$ definamos*

$$c_n = \left(\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \ dx\right)^{-1} > 0$$

y sea $Q_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función polinómica dada por $Q_n(x) = c_n\,(1 - x^2)^n \in \mathbb{R}[x]$, $x \in [-1, 1]$. Entonces:

1. $\int_{-1}^{1} Q_n(x)\ dx = 1$*,* $n \geq 1$*;*

2. $Q_n(x) \geq 0$*,* $x \in [-1, 1]$*,* $n \geq 1$*;*

3. Si $0 < \delta < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)\ dx + \int_{\delta}^{1} Q_n(x)\ dx = 0$*.*

Demostración. Notemos que $f_n(x) = (1-x^2)^n \in C([-1,1])$ es tal que $f_n(x) \geq 0$ y $f_n(0) = 1$, con lo que $\int_{-1}^{1} f_n(x)\ dx > 0$; así, $c_n > 0$ está bien definido para $n \geq 1$. Más aún, con esta notación, $Q_n = c_n\, f_n$, $n \geq 1$ de forma que $Q_n \in C([-1,1])$ y vale el ítem 2. Por otro lado,

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\ dx = c_n \int_{-1}^{1} f_n(x)\ dx = c_n \cdot c_n^{-1} = 1\,.$$

Lo anterior muestra que vale el ítem 1. Para verificar el ítem 3, comenzamos estimando el crecimiento de los c_n's. Notemos que $(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2$ para $x \in [-1,1]$: en efecto, si $h(x) = (1-x^2)^n - (1-nx^2)$ para $x \in [-1,1]$ entonces, $h(0) = 0$ y

$$h'(x) = 2\,n\,x(1-(1-x^2)^{n-1})\,.$$

Así, $h'(x) \leq 0$ si $x \in [-1,0]$ y $h'(x) \geq 0$ si $x \in [0,1]$. Entonces, por el teorema del valor medio concluimos que h toma su valor mínimo en $x = 0$ y $h(0) = 0$ que muestra que $h \geq 0$.

$$\begin{aligned} c_n^{-1} &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\ dx \geq \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n\ dx \geq \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} (1-n\cdot x^2)\ dx \\ &= (x - \frac{n}{3}x^3)|_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $f_n(x) = (1-x^2)^n \geq 0$ en $[-1,1]$. La desigualdad anterior muestra que $c_n \leq \sqrt{n}$, $n \geq 1$.

Sea $0 < \delta < 1$; si $\delta \leq x \leq 1$ entonces $0 \leq 1 - x^2 \leq 1 - \delta^2 < 1$ y como

$$\left|\frac{\sqrt{n+1}(1-\delta^2)^{n+1}}{\sqrt{n}(1-\delta^2)^n}\right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}}(1-\delta^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1-\delta^2) < 1$$

vemos que

$$Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{para} \quad \delta \leq x \leq 1$$

porque la sucesión de la derecha corresponde al término general de una serie convergente (por el criterio del cociente que hemos considerado más arriba). Así, la restricción $Q_n|_{[\delta,1]}$ converge uniformemente a la función nula en $[\delta,1]$. De forma similar, se puede probar que la restricción $Q_n|_{[-1,-\delta]}$ converge uniformemente a la función nula en $[-1,-\delta]$. Por el Teorema 6.21 sobre integrales y convergencia uniforme, ahora vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{1} Q_n(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)\ dx = 0\,.$$

Estas dos igualdades prueban el ítem 3. $\square$

Teorema 6.41 (Aproximación de Weierstrass)**.** *Sea* $f \in C([0,1])$*. Entonces existe una sucesión de polinomios* $(q_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathbb{R}[x]$ *que converge uniformemente a* f *en* $[0,1]$*, es decir*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\, |f(x) - q_n(x)| :\ x \in [0,1]\,\} = \lim_{n\to\infty} d_\infty(f, q_n) = 0\,.$$

Demostración. Definimos la función auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - (f(0) + x(f(1) - f(0))) & \text{si } x \in [0,1]; \\ \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Notemos que g es evidentemente continua en $(0,1)$ (porque f lo es) y $g(0) = g(1) = 0$, de forma que se tiene continuidad en $x = 0$ y $x = 1$. A partir de lo anterior concluimos que g es continua en todo su dominio. Por otro lado, como la restricción $g|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ es función continua y $[0,1]$ es compacto, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \le M$ si $x \in [0,1]$; a partir de la definición de g concluimos que $|g(x)| \le M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, la restricción $g|_{[-1,2]} : [-1,2] \to \mathbb{R}$ también es continua; como $[-1,2]$ es compacto entonces $g|_{[-1,2]}$ es uniformemente continua: así, si $\varepsilon > 0$ entonces existe $0 < \delta < 1$ tal que si $x,\ y \in [-1,2]$ son tales que $|x - y| < \delta$ entonces $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$; pero notemos que si tomamos $x,\ y \in \mathbb{R}$ tales que $x \notin [-1,2]$ ó $y \notin [-1,2]$, $|x - y| < \delta (< 1)$ entonces se verifica que $x \notin [0,1]$ y $y \notin [0,1]$, de forma que en este caso $|g(x) - g(y)| = |0 - 0| = 0$. Lo anterior muestra que g es uniformemente continua en $\mathbb{R}$!

Sea $n \ge 1$ y definamos la función $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} g(x+t) \cdot Q_n(t)\, dt \quad \text{para} \quad x \in [0,1],$$

donde $Q_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ es la función definida en el lema anterior. Notemos que fijado $x \in [0,1]$, el integrando $g(x+t) \cdot Q_n(t)$ es una función continua de $t \in [-1,1]$ y por lo tanto, integrable. Más aún, notemos que en este caso usando el cambio de variables $s = x + t$,

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} g(x+t) \cdot Q_n(t)\ dt = \int_{-1+x}^{1+x} g(s) \cdot Q_n(s-x)\ ds = \int_{0}^{1} g(s) \cdot Q_n(s-x)\ ds$$

donde hemos usado que $g(s) = 0$ si $s \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.

Veamos primero que la sucesión de funciones $(p_n)_{n \ge 1}$ converge uniformemente a $g|_{[0,1]}$ en $[0,1]$: en efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ correspondiente a la continuidad uniforme de g en $\mathbb{R}$: es decir, si $|x - y| < \delta$ entonces $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$, y sea $M \in \mathbb{R}$ como antes: $|g(x)| \le M$ para $x \in \mathbb{R}$. Por el lema anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$ entonces

$$\int_{\delta}^{1} Q_n(x)\ dx \le \frac{\varepsilon}{2\,M} \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)\ dx \le \frac{\varepsilon}{2\,M}$$

Si $x \in [0,1]$ y $n \ge n_0$ entonces

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - g(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} g(x+t) \cdot Q_n(t)\ dt - \int_{-1}^{1} g(x) \cdot Q_n(t)\ dt \right| \\
&= \left| \int_{-1}^{1} (g(x+t) - g(x)) \cdot Q_n(t) \right| \le \int_{-1}^{1} |g(x+t) - g(x)| \cdot Q_n(t)\ dt \\
&= \int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1} |g(x+t) - g(x)| \cdot Q_n(t)\ dt \\
&\le 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\ dt + \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\ dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\ dt \\
&\le \varepsilon + \epsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon
\end{aligned}$$

donde hemos escrito la suma de tres integrales correspondientes a la descomposición de $[-1, 1]$ en los tres subintervalos $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ y $[\delta, 1]$; además, en la acotación de la primer y tercer integral hemos usado que $|g(x+t) - g(x)| \le |g(x+t)| + |g(x)| \le 2M$, que la integral de Q_n en $[-\delta, \delta]$ es más chica que 1, y el hecho de que $n \ge n_0$. Lo anterior muestra que $(p_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente a g.

Si bien no es del todo evidente, $p_n(x)$ es un polinomio (función polinómica): en efecto, como $Q_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces existen coeficientes $Q_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j\, x^j$; entonces

$$Q_n(s-x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j (s-x)^j = \sum_{j=0}^{2n} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} s^{j-k} \cdot (-1)^k \cdot x^k$$

Entonces

$$\int_0^1 g(s) \cdot Q_n(s-x)\; ds = \sum_{j=0}^{2n} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \left(\int_0^1 g(s) \cdot s^{j-k} \cdot (-1)^k\; ds \right) \cdot x^k$$

de forma que si notamos $b_{j,k} = \int_0^1 g(s) \cdot s^{j-k} \cdot (-1)^k\; ds$ entonces

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} b_{j,k} \cdot x^k$$

que es una expresión polinómica en la variable x Finalmente, notemos que si

$$q_n(x) = p_n(x) + (f(0) + x(f(1) - f(0))) \in \mathbb{R}[x]$$

entonces

$$|f(x) - q_n(x)| = |f(x) - (f(0) + x(f(1) - f(0))) - p_n(x)| = |g(x) - p_n(x)|$$

que muestra que $(q_n)_{n\ge1}$ es una sucesión de funciones polinómicas que converge uniformemente a f en $[0, 1]$. □

Corolario 6.42. *Sea $h \in C([a, b])$; entonces existe una sucesión de funciones polinómicas $(p_n)_{n\ge1}$ que converge uniformemente a h en $[a, b]$*

Demostración. Ejercicio (sugerencia: considerar el cambio de variables dado por el homeomorfismo lineal $r : [0, 1] \to [a, b]$ dada por $r(x) = a + (b - a)x$, $x \in [0, 1]$). □

Como observación final, notemos que este método de aproximación usó las propiedades de la sucesión de funciones $(Q_n)_{n\ge1}$ dadas (formalmente!) en los ítems 1., 2. y 3. del Lema 6.40 para probar que si definimos

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} g(x+t) \cdot Q_n(t)\; dt$$

(donde g está construida como en la prueba anterior) entonces $(p_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente a g. SOLO se usó quienes eran los Q_n explícitamente para mostrar que las funciones aproximantes $p_n(x)$ eran polinomios al final. Esto muestra que sucesiones de funciones $(Q_n)_{n\ge1}$ que verifican ítems 1., 2. y 3. del Lema 6.40 permiten generar sucesiones de funciones que aproximan uniformemente funciones continuas.

Más aún, la expresión usada para construir las funciones p_n de más arriba es la llamada convolución de g con Q_n. En general, si las funciones Q_n tienen propiedades de suavidad, entonces las funciones obtenidas por convolución con estas Q_n heredan algunas de estas propiedades de suavidad. El caso emblemático es: si los Q_n son polinomios, entonces la convolución contra Q_n resulta un polinomio (que es una clase de funciones suaves!).

6.5 Ejercicios

Ejercicio 109. Para cada una de las sucesiones siguientes, hallar el límite puntual, si existe, sobre el intervalo indicado, y decir si hay convergencia uniforme.

a) $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x, \qquad x \in [0,1],$

b) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < n \\ x - n, & \text{si } x \geq n \end{cases}, \qquad \text{sobre } [a,b],$

c) $f_n(x) = e^{-nx^2}, \qquad x \in [-1,1].$

Ejercicio 110. Sea $[0,1]$ con la métrica usual (como subespacio de $\mathbb{R}$) y para cada $n \geq 1$, sea $f_n : [0,1] \to [0,1]$, dada por $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Probar que cada f_n es función continua en $[0,1]$ y además la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente al límite $f : [0,1] \to [0,1]$ dado por $f(x) = 0$ si $x \in [0,1)$ y $f(1) = 1$ Observar que f no es una función continua en este caso.

Ejercicio 111. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2},$$

converge puntualmente, pero no uniformemente, a una función continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 112. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que toda sucesión uniformemente convergente de funciones acotadas en E es uniformemente acotada.

Ejercicio 113. Si $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ convergen uniformemente en $E \subset \mathbb{R}^n$, probar:

a) $\{f_n + g_n\}_n$ converge uniformemente en E.

b) Si además $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ son acotadas, entonces $\{f_n.g_n\}_n$ converge uniformemente en E.

c) Dar un ejemplo de sucesiones $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$ uniformemente convergentes pero tales que $\{f_n.g_n\}_n$ no lo sea (pero sí converja puntualmente).

Ejercicio 114. Probar lo siguiente:

1. $C_b(X,\mathbb{R}^k)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y la acción escalar puntual: es decir, si $f,\, g \in C_b(X,\mathbb{R}^k)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f + g : X \to \mathbb{R}^k$ satisface $\alpha f + g \in C_b(X,\mathbb{R}^k)$.

2. Si $f,\, g \in C_b(X,\mathbb{R}^k)$ entonces $\langle f,\, g\rangle : X \to \mathbb{R}$ satisface $\langle f,\, g\rangle \in C_b(X,\mathbb{R})$.

   Dada $f,\, g \in C_b(X,\mathbb{R}^k)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

a) $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $f = 0$;

b) $\|\alpha\, f\|_\infty = |\alpha|\, \|f\|_\infty$;

c) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

d) $\|\langle f,\, g\rangle\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

Ejercicio 115. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas sobre $[a,b]$. Demostrar que $\{f_n\}_n$ es equicontinua sobre $[a,b]$.

Ejercicio 116. Supongamos que: f es una función real continua, $f_n(t) = f(nt)$, y que $\{f_n\}_n$ es una familia de funciones equicontinua en $[0, 1]$. Demostrar que f debe ser constante en $[0, \infty)$.

Ejercicio 117. Sea $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, con $x \in [0, 1]$. Probar que f_n converge puntualmente a 0 pero no uniformemente. Ver que la integral del límite no es el límite de las integrales de las f_n.

Ejercicio 118. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}.$$

¿Para que valores de x la serie converge absolutamente? ¿En qué intervalos converge converge uniformemente? ¿En qué intervalos no converge uniformemente? ¿Es f continua en los puntos donde converge? ¿Está acotada f?

Ejercicio 119. Para cada $n \geq 1$ natural y $x \in \mathbb{R}$, se define

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Probar que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a una función f y que la igualdad

$$f^{'}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x)$$

es cierta para $x \neq 0$ ¿Es $\left\{f_n^{'}\right\}_n$ uniformemente convergente a $f^{'}$, en todo intervalo cerrado que no contenga al origen?

Ejercicio 120. Sean

$$f_n(x) = \begin{cases} sen^2\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Demostrar que $\{f_n\}_n$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua f. Utilizar la serie $\sum f_n$ para mostrar que la convergencia absoluta de una serie no implica la convergencia uniforme.

Ejercicio 121. Definimos $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

a) Usando el criterio de Weierstrass demostrar que la serie converge uniformemente en cada intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

b) Demostrar que e^x es continua usando el ítem anterior.

c) Demostrar que

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

d) Probar que

$$e^x = 1 + \int_0^x e^t dt.$$

Usando esta igualdad y derivando ambos miembros mostrar que la derivada de e^x es e^x.

Ejercicio 122.

a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, probar que $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$.

b) Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}$.

Ejercicio 123. Supongamos que f es una función continua definida en $[0,1]$ y suponemos que, para todo n se verifica

$$\int_0^1 f(x)x^n = 0.$$

Demostrar que $f(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$.

Sugerencia: Se puede probar que $f^2 = 0$; para ello usar el teorema de Stone-Weierstrass y el siguiente resultado: Si f es continua en $[a,b]$ con $f \geq 0$ en $[a,b]$ y si $\int_0^1 f = 0$, entonces $f = 0$ en $[a,b]$.

Ejercicio 124. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones uniformemente acotadas, que son integrables-Riemann en $[a,b]$, y sea

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt,$$

donde $a \leq x \leq b$. Probar que existe una subsucesión $\{F_{n_k}\}$ que converge uniformemente en $[a,b]$.

Ejercicio 125.

a) Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $a \in X$ fijo. A todo $p \in X$ le asignamos la función f_p definida por:

$$f_p(x) = d(x,p) - d(x,a).$$

Demostrar que $|f_p(x)| \leq d(a,p)$ para todo $x \in X$ y, por lo tanto, $f_p \in C(X)$. Probar que

$$\|f_p - f_q\| = d(p,q),$$

para todo $p,q \in X$.

b) Si $\phi(p) = f_p$ entonces ϕ es una isometría de X en $\phi(X) \subset C(X)$.

c) Sea Y la clausura de $\phi(X)$ en $C(X)$. Demostrar que Y es completo.

Ejercicio 126. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{xsen(x)}{n} + x + \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$. ¿Converge uniformemente en $\mathbb{R}$? Justificar.

Ejercicio 127. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, \infty)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geq 0$ por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}.$$

Sugerencia: Probar que las funciones $f_n(x)$ tienen un máximo en $x_n = 1/\sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcular el valor de $f_n(x_n) = f_n(1/\sqrt{n})$. Por último, en el intervalo $[0, a]$, calcular

$$\max_{x \in [0,a]} f_n(x),$$

para todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $1/\sqrt{n} < a$ ¿Qué podemos concluír sobre la convergencia uniforme? Hacer un razonamiento análogo en el intervalo $[a, \infty)$.

Ejercicio 128. Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^n},$$

converge puntualmente para todo $x \in [0, 1]$ pero la convergencia no es uniforme.

Ejercicio 129. Probar que la sucesión de funciones definidas para $x \in [0, 1]$ por: $f_n(x) = x^n log(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f_n(0) = 0$, converge uniformemente en $[0, 1]$.

Ejercicio 130. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función continua, no idénticamente nula con

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$;
- $f(0) = 0$.

Sean $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ las sucesiones de funciones definidas por $f_n(x) = f(nx)$, $g_n(x) = f(x/n)$, para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que:

a) Las sucesiones $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ convergen puntualmente a cero en $\mathbb{R}_0^+$ pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}_0^+$.

b) La sucesión $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}_0^+$.

Ejercicio 131. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 e $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x - \frac{1}{n}}^{x + \frac{1}{n}} f(t)dt.$$

Probar que $\left\{f_n'\right\}$ converge uniformemente a $\left\{f'\right\}$ en I.

Ejercicio 132. Probar que

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1 - x} log(1/x)dx = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n + 4)^2}.$$

Sugerencia: Utilizar la serie geométrica.

Ejercicio 133.

a) Probar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2},$$
converge uniformemente para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Probar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n},$$
la cual se obtiene de derivar término a término la serie del inciso anterior, diverge cuando $x = 0$ ¿Esto contradice algún resultado conocido? ¿Qué hipótesis no se verifica?

Ejercicio 134. Utilizar la siguiente igualdad:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6},$$
válida uniformemente para $0 \leq x \leq \pi$, para probar
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Ejercicio 135. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{n}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Ejercicio 136. Sea $\{f_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de funciones definidas en $\mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

a) Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones.

b) Probar que no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

c) Probar que converge uniformemente en los intervalos de la forma $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ donde $a > 0$.

Ejercicio 137. Sea $f_n(x) = x^n$.

1. Probar que la sucesión converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$.
2. Sea g continua en $[0, 1]$ tal que $g(1) = 0$. Probar que la sucesión $h_n(x) = g(x)x^n$ converge uniformemente en $[0, 1]$

7 Funciones vectoriales de varias variables

En este capítulo vamos a estudiar la diferenciación de funciones vectoriales de varias variables y vamos a probar algunos resultados relacionados con esta noción (teorema de la función implícita y de la función inversa).

7.1 Repaso de álgebra lineal

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{V} = n$.

1. En este caso podemos considerar bases, es decir: conjuntos (indicados) $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tales que

   (a) B es linealmente independiente: si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ son tales que

   $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i = 0 \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0\,.$$

   (b) B genera a $\mathbb{V}$: dado $w \in \mathbb{V}$ existen (únicos) $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tales que

   $$w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, v_i\,.$$

   En este caso notamos $[w]_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ al vector (columna) de coordenadas de w con respecto a B.

Como ejemplo de la situación anterior, podemos considerar $\mathbb{R}^n$ con su estructura usual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y la base canónica: $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. En este caso B es una base ortonormal con respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^n$. En particular, recordemos que en este caso: dado $w \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, e_i\rangle\, e_i \quad \text{y} \quad \|w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle w, e_i\rangle^2\,.$$

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente.

1. Decimos que una función $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si $T(\alpha v + w) = \alpha\, T(v) + T(w)$, para todos v, $w \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. En este caso

   $$\ker T = \{v \in \mathbb{V} :\ Tv = 0\} \subset \mathbb{V} \quad \text{y} \quad R(T) = \{Tv :\ v \in \mathbb{V}\} \subset \mathbb{W}$$

   son subespacios vectoriales. Recordemos que T es inyectiva si y solo si $\ker T = \{0\}$ y vale que

   $$\dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} R(T) = \dim_R \mathbb{V} = n\,.$$

2. Notamos $L(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = \{T : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \ /\ T \text{ es transformación lineal}\}$. Si $S, T \in L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

   $$\alpha T + S : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \quad \text{dada por} \quad (\alpha T + S)(v) = \alpha T(v) + S(v)$$

   verifica $\alpha T + S \in L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Más aún, con estas definiciones $L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\dim_{\mathbb{R}} L(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = n \cdot m$.

3. Si $\mathbb{X}$ es otro $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{X} = p$ entonces: si $U \in L(\mathbb{W}, \mathbb{X})$ se tiene que la composición usual de funciones $U \circ T : \mathbb{V} \to \mathbb{X}$ es transformación lineal, $U \circ T \in L(\mathbb{V}, \mathbb{X})$. En adelante notamos UT para la composición anterior.

4. Notemos que en el caso en que $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ entonces $L(\mathbb{V}) = L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ es un álgebra con unidad sobre $\mathbb{R}$: en efecto, en este caso se verifica que la composición juega el papel de un producto que $L(\mathbb{V})$ que satisface: $\alpha\,(ST) = (\alpha\, S)\, T = S\,(\alpha\, T)$,

$$T(S+U) = TS + TU \quad \text{ y } \quad (S+U)T = ST + UT \quad \text{ para } \quad S, T, U \in L(\mathbb{V})\,.$$

   Notemos que la función identidad $I : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal y es una unidad para el producto: $S\, I = I\, S = S$, para $S \in L(\mathbb{V})$ (porque el producto es en realidad la composición de funciones!).

En el resto del capítulo, vamos a considerar a $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, con la estructura usual. En particular, $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado, con la norma euclídea $\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Definición 7.1. Sea $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ transformación lineal entre espacios euclídeos. Definimos la norma de T, notada $\|T\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dada por

$$\|T\| = \sup\{\|Tv\| : \ v \in \mathbb{R}^n\,,\ \|v\| \leq 1\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$

□

Obs 7.2 (Buena definición de $\|T\|$)**.** Consideremos la notación de la definición anterior: notemos que para que la norma de T esté bien definida, el conjunto sobre el que se toma supremo debe ser acotado superiormente. Verificamos este hecho: sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$ entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, e_i$ y $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$. En este caso,

$$\begin{aligned} \|Tv\| &= \|T \sum_{i=1}^n \alpha_i\, e_i\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i\, Te_i\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\ \|Te_i\| \leq (\sum_{i=1}^n \alpha_i^2)^{1/2}\, (\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2)^{1/2} \\ &= \|v\|\, (\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

en donde usamos la desigualdad triangular y la desigualdad de C-S. La desigualdad anterior muestra que

$$\|Tv\| \leq (\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2)^{1/2} \quad \text{ para } \quad v \in \mathbb{R}^n\,,\ \|v\| \leq 1\,.$$

En particular, $\|T\|$ está bien definida y $\|T\| \leq (\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2)^{1/2}$. △

Teorema 7.3. *Sean $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ con sus estructuras euclídeas. Entonces*

1. *Si $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,*

$$\|Tv\| \leq \|T\|\, \|v\| \quad \textit{para} \quad v \in \mathbb{R}^n$$

   y T es uniformemente continua.

2. Si $S, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0\,,\ \|\alpha S\| = |\alpha|\,\|S\| \qquad y \qquad \|S+T\| \le \|S\| + \|T\|\,.$$

Los hechos anteriores muestran que $\|\cdot\| : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ es una norma.

3. Si $d : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ denota la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$ en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ entonces el espacio métrico $(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), d)$ es completo.

4. Si $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $S \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ entonces $ST \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ verifica $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$.

Demostración. 1. Notemos que si $v = 0$ entonces $\|Tv\| = \|T0\| = \|0\| = 0 = \|T\|\,\|v\|$. Por otro lado, si $v \neq 0$ entonces sea $w = \|v\|^{-1}\, v$; en este caso $\|w\| = 1$ y

$$\|v\|^{-1}\,\|Tv\| = \|T(\|v\|^{-1} v)\| = \|Tw\| \le \|T\| \implies \|Tv\| \le \|T\|\,\|v\|\,.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ entones si $\delta = (1 + \|T\|)^{-1}\,\varepsilon > 0$ se tiene que: si $\|v - w\| < \delta$ entonces

$$\|Tv - Tw\| = \|T(v-w)\| \le \|T\|\,\|v-w\| < \|T\|\,(1+\|T\|)^{-1}\,\varepsilon < \varepsilon\,.$$

2. Sea $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| \le 1$:

$$\|(S+T)(v)\| = \|Sv + Tv\| \le \|Sv\| + \|Tv\| \le \|S\| + \|T\| \implies \|S+T\| \le \|S\| + \|T\|\,.$$

Por otro lado, usando que $\|(\alpha\, S)(v)\| = \|\alpha\, S(v)\| = |\alpha|\,\|Sv\|$ se verifica que $\|\alpha S\| = |\alpha|\,\|S\|$. Es claro que si $T = 0$ entonces $\|T\| = 0$ (por definición, si $T = 0$ entonces $Tv = 0$, para $v \in \mathbb{R}^n$). Por otro lado si $\|T\| = 0$ entonces: si $v \in \mathbb{R}^n$, $\|Tv\| \le \|T\|\,\|v\| = 0$ que muestra que $Tv = 0$, $v \in \mathbb{R}^n$; y en este caso $T = 0$.

3. Sea $(T_k)_{k\ge 1}$ una sucesión de Cauchy en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$ por hipótesis existe $k_0 \ge 1$ tal que si r, $s \ge k_0$ entonces $\|T_r - T_s\| < \varepsilon$. En este caso, si $1 \le i \le n$ entonces

$$\|T_r e_i - T_s e_i\| = \|(T_r - T_s) e_i\| \le \|T_r - T_s\|\,\|e_i\| = \|T_r - T_s\| < \varepsilon\,.$$

Lo anterior muestra que la sucesión en $\mathbb{R}^m$ dada por $(T_k e_i)_{k\ge 1}$ es de Cauchy, para cada $1 \le i \le n$. Como $\mathbb{R}^m$ es espacio métrico completo, existen

$$\lim_{k\to\infty} T_k e_i = w_i \in \mathbb{R}^m \qquad \text{para} \qquad 1 \le i \le n\,.$$

Usando la estimación de más arriba, notemos que si $r \ge k_0$ entonces

$$\|T_r e_i - w_i\| = \|T_r e_i - \lim_{k\to\infty} T_k e_i\| = \lim_{k\to\infty} \|T_r e_i - T_k e_i\| \le \varepsilon \tag{19}$$

donde usamos la continuidad de la norma y donde la última desigualdad es consecuencia del hecho de que $\|T_r e_i - T_k e_i\| < \varepsilon$ para $k \ge k_0$.

Definamos $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ como la (única) transformación lineal tal que $Te_i = w_i$, $1 \le i \le n$. Notemos que la Eq. (19) muestra que, con la notación de más arriba, si $r \ge k_0$ entonces

$$\|T_r - T\| \le (\sum_{i=1}^n \|(T_r - T)e_i\|^2)^{1/2} \le (\sum_{i=1}^n \varepsilon^2)^{1/2} = n^{1/2}\,\varepsilon\,,$$

en donde usamos la estimación de la norma de la diferencia de la Observación 7.2. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario (y $n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}$ está fijo), vemos que $\lim_{k\to\infty} \|T_k - T\| = 0$.

4. Si aplicamos el ítem 1.: dado $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| \le 1$ entonces

$$\|STv\| = \|S(T(v))\| \le \|S\|\,\|Tv\| \le \|S\|\,\|T\|\,\|v\| \le \|S\|\,\|T\|\,.$$

Tomando supremo sobre los v's como arriba concluimos que vale que $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$.

□

Consideremos un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ tal que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$. En este caso, dado $T \in L(\mathbb{V})$ (en este caso decimos que T es un operador lineal que actúa en $\mathbb{V}$) recordemos que T es inversible si existe $S \in L(\mathbb{V})$ tal que $ST = TS = I$. En este caso S es único y coincide con la función inversa de T, y lo notamos $S = T^{-1}$: formalmente, $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

Recordemos que dado $T \in L(\mathbb{V})$ con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es inversible;
2. T es inyectivo;
3. $\ker T = \{0\}$;
4. T es suryectivo;
5. T es biyectivo (como función).

En el caso en que se verifique alguna de las condiciones anteriores, entonces T^{-1} coincide con la función inversa de T.

En adelante, notamos

$$\mathcal{G}\ell(n) = \{T \in L(\mathbb{R}^n) :\ T \text{ es inversible } \} \subset L(\mathbb{R}^n)\,.$$

Teorema 7.4. *Con las notaciones anteriores:*

1. *Dado $T \in \mathcal{G}\ell(n)$ y $S \in L(\mathbb{V})$ tal que $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, se tiene que $S \in \mathcal{G}\ell(n)$.*
2. *$\mathcal{G}\ell(n) \subset L(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto abierto con respecto a la métrica inducida por la norma; además, la función $\mathcal{F} : \mathcal{G}\ell(n) \to \mathcal{G}\ell(n)$ dada por $\mathcal{F}(T) = T^{-1}$ es continua con respecto a la métrica inducida por la norma.*

Demostración. 1. Sea $x \in \mathbb{R}^n$: entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\| &= \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|T^{-1}Tx\| \le \frac{\|T^{-1}\|}{\|T^{-1}\|}\|Tx\| = \|(T-S)x + Sx\| \le \|(T-S)x\| + \|Sx\| \\ &\le \|T-S\|\,\|x\| + \|Sx\|\,.\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad anterior, si $\|T-S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ entonces $\|T^{-1}\|^{-1} - \|T-S\| > 0$ y

$$0 \le (\|T^{-1}\|^{-1} - \|T-S\|)\|x\| \le \|Sx\| \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

En particular, si $Sx = 0$ entonces $\|Sx\| = 0$ y por la desigualdad anterior, $\|x\| = 0$ es decir, $x = 0$. De esta forma, $\ker S = \{0\}$ y S es inyectivo. Por una observación previa concluimos que $S \in \mathcal{G}\ell(n)$.

2. Si $T \in \mathcal{G}\ell(n)$ entonces el ítem anterior muestra que

$$B_{\|T^{-1}\|^{-1}}(T) = \{S \in L(\mathbb{R}^n) : \ \|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}\} \subset \mathcal{G}\ell(n)$$

que muestra que $\mathcal{G}\ell(n)$ es un conjunto abierto en $L(\mathbb{R}^n)$. Para ver la continuidad de $\mathcal{F}$, sea $T \in \mathcal{G}\ell(n)$ y sea $S \in \mathcal{G}\ell(n)$ tal que $\|T - S\| < \frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{2}$. Entonces podemos repetir el argumento del ítem 1.; en este caso notemos que $\|T^{-1}\|^{-1} - \|T - S\| > \frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{2}$. Entonces concluimos que

$$\frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{2}\|x\| \leq \|Sx\| \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Tomando $x = S^{-1}y$ para $y \in \mathbb{R}^n$ (de forma que $Sx = SS^{-1}y = y$), podemos re-escribir la desigualdad anterior como

$$\frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{2}\|S^{-1}y\| \leq \|y\| \implies \|S^{-1}y\| \leq 2\|T^{-1}\|\|y\| \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}^n .$$

La desigualdad anterior dice, en particular, que $\|S^{-1}\| \leq 2\|T^{-1}\|$, siempre que $\|T - S\| < \frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{2}$. Finalmente, notemos que $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$ implica que

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \, \|S - T\| \, \|S^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \, \|S - T\| \, 2\|T^{-1}\| \quad \text{si} \quad \|T - S\| < \frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{2} ,$$

donde hemos usado la submultiplicatividad de la norma. Así, si $(S_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión en $\mathcal{G}\ell(n)$ que converge a T y $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $k_0 \geq 1$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $\|S_k - T\| < \min\{\varepsilon, \frac{\|T^{-1}\|^{-1}}{2}\}$ y entonces $\|S_k^{-1} - T^{-1}\| \leq 2\,\varepsilon\,\|T^{-1}\|^2$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, vemos que $(\mathcal{F}(S_k))_{k\geq 1}$ converge a $\mathcal{F}(T)$. Usando la caracterización de continuidad con sucesiones, hemos verificado que $\mathcal{F}$ es continua. □

Obs 7.5 (Representaciones matriciales)**.** Consideremos las bases canónicas $B_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Sea $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$: dado $1 \leq j \leq n$ sea $[Te_j]_{B_m} = (a_{ij})_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ el vector de coordenadas de Te_j con respecto a B_m. Como B_m es base ortonormal,

$$a_{ij} = \langle Te_j, u_i\rangle \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq m \, , \, 1 \leq j \leq n \, .$$

En este caso consideramos la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m\,,\,1\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que es la matriz de T con respecto a las bases B_m y B_n, y notada $A = [T]_{B_m,B_n}$. Recordemos que en este caso,

$$[Tv]_{B_m} = A[v]_{B_n} \quad \text{para} \quad v \in \mathbb{R}^n \, .$$

Más aún, la función $[\cdot]_{B_m,B_n} : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^{m\times n}$ es un isomorfismo lineal. Además, si $S \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ y B_p denota la base canónica de $\mathbb{R}^p$ entonces $[ST]_{B_p,B_n} = [S]_{B_p,B_m}\,[T]_{B_m,B_n}$.

Por otro lado, notemos que $\|Te_j\|^2 = \sum_{i=1}^m a_{ij}^2$, $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$\|T\| \leq (\sum_{j=1}^n \|Te_j\|^2)^{1/2} = (\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}^2)^{1/2}$$

△

Proposición 7.6. *Sea (X, d) EM y sea $f : X \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ función.*

1. *Si f es continua de (X,d) en $(L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|)$ y $v\in\mathbb{R}^n$ entonces la función $g:X\to\mathbb{R}^m$ dada por $g(x)=f(x)v$, $x\in X$, es continua.*

2. *Consideremos las bases canónicas $B_n=\{e_1,\dots,e_n\}$ y $B_m=\{u_1,\dots,u_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Para $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ definamos $a_{ij}:X\to\mathbb{R}$ dada por*

$$a_{ij}(x)=\langle f(x)e_j,u_i\rangle \quad \textit{para} \quad x\in X\,.$$

Entonces $f(x)$ es continua si y solo si $a_{ij}(x)$ es función continua para todo $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

Demostración. 1. Supongamos que f es continua y sea $v\in\mathbb{R}^n$ fijo. Fijado $p\in X$, si $\varepsilon>0$ entonces existe $\delta>0$ tal que: si $d(p,x)<\delta$ entonces $\|f(p)-f(x)\|<\varepsilon$. Sea $v\in\mathbb{R}^n$: entonces, si $d(p,x)<\delta$ se tiene que

$$\|g(p)-g(x)\|=\|f(p)v-f(x)v\|=\|(f(p)-f(x))v\|\le\|f(p)-f(x)\|\,\|v\|<\varepsilon\,\|v\|\,.$$

Como $\varepsilon>0$ es arbitrario (y $\|v\|$ es una constante, porque v está fijo), vemos que g es continua en $p\in X$. Como $p\in X$ es arbitrario, concluimos que g es continua en X.

2. Supongamos que f es continua y sean $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ fijos. Por el ítem 1. la función $g(x)=f(x)e_j$ es continua en X. Por otro lado, la función constante $h:X\to\mathbb{R}^m$ dada por $h(x)=u_i$, $x\in X$, también es continua (ejercicio sencillo!). En este caso, hemos visto que la función $a_{ij}(x)=\langle g(x)\,,\,h(x)\rangle$, $x\in X$, es continua.

Recíprocamente, supongamos que las funciones $a_{ij}(x):X\to\mathbb{R}$ son continuas, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. Sean $p\in X$ y $\varepsilon>0$: en este caso, para cada $1\le i\le m$ y $1\le j\le n$ existe $\delta_{ij}>0$ tal que si $d(p,x)<\delta_{ij}$ entonces $|a_{ij}(p)-a_{ij}(x)|<\frac{\varepsilon}{(n\,m)^{1/2}}$. Si consideramos $\delta:=\min\{\delta_{ij}:1\le i\le m,1\le j\le n\}>0$ entonces

$$d(p,x)<\delta \implies \|f(p)-f(x)\|\le(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(a_{ij}(p)-a_{ij}(x))^2)^{1/2}<(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\frac{\varepsilon^2}{m\,n})^{1/2}=\varepsilon\,.$$

donde hemos usado que la matriz que representa a la transformación lineal $f(p)-f(x)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ es $(a_{ij}(p)-a_{ij}(x))_{i,j}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ (y la estimación para la norma de esta transformación usando las entradas de su matriz de la Observación anterior). Las estimaciones anteriores muestran que f es continua en $p\in X$. Como $p\in X$ era arbitrario, entonces f es continua en todo X. $\square$

7.2 Diferenciación

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ función y sea $x\in(a,b)$. Recordemos que f es diferenciable en x si

$$\exists\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\in\mathbb{R}\,.$$

Así, f es diferenciable en x si y solo si

$$\exists\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right)=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)\,h}{h}\right)=0$$

La caracterización anterior sugiere la siguiente extensión de la definición de diferenciabilidad de una función vectorial de varias variables.

Definición 7.7. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ función. Decimos que f es diferenciable en $x \in E$ si existe $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0\,.$$

En este caso notamos $Df_x = T$ y lo llamamos el diferencial de f en x. △

Obs 7.8. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ función.

1. Si $x \in E$ entonces, como E es abierto, existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset E$. En este caso, si $0 < \|h\| < \delta$ entonces $x + h \in B_\delta(x) \subset E$ y tiene sentido considerar la expresión $f(x+h)$ y luego, el cociente de la definición anterior. Así, el límite de la definición de diferenciabilidad está bien planteado.

2. Si f es diferenciable en x entonces la aproximación lineal (afín) $L(h) = f(x) + Df_x h$ representa de forma conveniente los valores $f(x+h)$ para h's de norma chica (es decir, para puntos $x+h$ cercanos a x): de hecho, el límite de la definición anterior se puede leer como el hecho de que la diferencia $f(x+h) - L(h)$ es chica, incluso comparada con la distancia $\|(x+h) - x\| = \|h\|$ entre estos puntos.

3. Finalmente, verifiquemos que si f es diferenciable en x entonces existe una única transformación lineal $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ como en la definición anterior: en efecto, supongamos que T_1, $T_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ son tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T_j h\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{para} \quad j = 1,\, 2\,.$$

Entonces, si $h \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\|h\|$ es suficientemente chico (de forma que $x + h \in E$) entonces

$$\begin{aligned} \|(T_2 - T_1)h\| &= \|f(x+h) - f(x) - T_1 h - (f(x+h) - f(x) - T_2 h)\| \\ &\leq \|f(x+h) - f(x) - T_1 h\| + \|(f(x+h) - f(x) - T_2 h)\| \end{aligned}$$

Así, si $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, entonces haciendo $h = t\,v$, con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suficientemente chico, en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{|t|\ \|(T_2 - T_1)v\|}{|t|\ \|v\|} &= \frac{\|(T_2 - T_1)t\,v\|}{\|t\,v\|} = \frac{\|(T_2 - T_1)h\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\|f(x+h) - f(x) - T_1 h\|}{\|h\|} + \frac{\|f(x+h) - f(x) - T_2 h\|}{\|h\|} \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $\|(T_2 - T_1)v\| = 0$ y luego $T_1 v = T_2 v$ para $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Así, $T_1 = T_2$ y el diferencial de f en x queda bien definido.

Ejemplo 7.9. Consideramos $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. En particular f es una función; en este caso f es diferenciable en todo punto $x \in \mathbb{R}^n$: en efecto, en este caso si consideramos $T = f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se tiene que $f(x+h) - f(x) - Th = f(x) + f(h) - f(x) - f(h) = 0$ y luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0\,.$$

Así, concluimos que en este caso $Df_x = f$. △

Obs 7.10 (Linealidad de la diferenciación)**.** Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f,\, g : E \to \mathbb{R}^m$ funciones diferenciables en $x \in E$. Si $b \in \mathbb{R}$ entonces la función $f + b\, g : E \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in E$ y vale que

$$D(f + b\, g) = Df_x + b\, Dg_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\,.$$

La verificación de esta afirmación es un ejercicio! △

Definición 7.11. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ función. Decimos que f es diferenciable en E si f es diferenciable en cada punto $x \in E$. En este caso queda definida una función $Df_{(\cdot)} : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, que a cada $x \in E$ le hace corresponder el diferencial $Df_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. △

Proposición 7.12. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ tal que f es diferenciable en el punto $x \in E$. Entonces f es continua en el punto $x \in E$.*

Demostración. Por hipótesis

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x) - Df_x h\| = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df_x h\|}{\|h\|}\, \|h\| = 0\,,$$

por propiedades de límites. Entonces

$$\begin{aligned} 0 \le \limsup_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\| &= \limsup_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x) - Df_x h + Df_x h\| \\ &\le \limsup_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x) - Df_x h\| + \|Df_x\|\, \|h\| = 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado propiedades del límite superior. Lo anterior nos permite concluir que $\limsup_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\| = 0$ que muestra $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$ (completar los detalles!). □

Teorema 7.13 (Regla de la cadena)**.** *Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : V \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x_0 \in V$. Supongamos que $W \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto tal que $f(V) \subset W$ y sea $g : W \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(x_0) \in W$. Entonces la composición $g \circ f : V \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0 y $D(g \circ f)_{x_0} = (Dg)_{f(x_0)} \cdot Df_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.*

Demostración. Sea $y_0 = f(x_0) \in W \subseteq \mathbb{R}^m$; sea $T = Df_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $S = (Dg)_{f(x_0)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Como $x_0 \in V$ y V es es abierto, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\|h\| < \delta_1$ entonces $x + h \in V$. En este caso definimos $u : B_{\delta_1}(0) (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Th \quad \text{para} \quad h \in B_{\delta_1}(0)\,.$$

De forma similar, como $y_0 \in W$ entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que si $k \in B_{\delta_2}(0)$ entonces $y_0 + k \in W$. En este caso definimos $v : B_{\delta_2}(0) (\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^p$ dada por

$$v(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - Sk \quad \text{para} \quad k \in B_{\delta_2}(0)\,.$$

Entonces definimos las funciones $\xi : B_{\delta_1}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ y $\eta : B_{\delta_2}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ tales que

$$\xi(h) = \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \quad \text{y} \quad \eta(k) = \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\,.$$

Por hipótesis, $\lim_{h\to 0}\xi(h) = 0$ y $\lim_{k\to 0}\eta(k) = 0$ de forma que extendemos $\xi(0) = 0$ y $\eta(0) = 0$ y estas extensiones $\xi : B_{\delta_1}(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\eta : B_{\delta_2}(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones continuas en $0 \in \mathbb{R}^n$ y $0 \in \mathbb{R}^m$ respectivamente.

Como f es diferenciable en x_0 entonces es continua en x_0: entonces, existe $0 < \delta_3 < \delta_1$ tal que si $\|h\| < \delta_3$ entonces $\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| < \delta_2$. Así, si $\|h\| < \delta_3$ consideramos $k(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \in B_{\delta_2}(0)$; en este caso, $y_0 + k(h) \in W$; además, notemos que

$$\|k(h)\| = \|Th + u(h)\| \leq \|Th\| + \|u(h)\| \leq \|T\|\,\|h\| + \xi(h)\,\|h\| = (\|T\| + \xi(h))\,\|h\| \,.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} g\circ f(x_0 + h) - g\circ f(x_0) - STh &= g(y_0 + k(h)) - g(y_0) - STh = v(k(h)) + Sk(h) - STh \\ &= v(k(h)) + S(k(h) - Th) = v(k(h)) - S(u(h))\,. \end{aligned}$$

Así, si $0 < \|h\| < \delta_3$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\|g\circ f(x_0 + h) - g\circ f(x_0) - STh\|}{\|h\|} &= \frac{\|v(k(h)) - S(u(h))\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\|v(k(h))\|}{\|h\|} + \frac{\|S(u(h))\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\|v(u(h) + Th)\|}{\|h\|} + \frac{\|S\|\,\|u(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\eta(u(h) + Th)\,\|u(h) + Th\|}{\|h\|} + \|S\|\,\xi(h) \\ &\leq \frac{\eta(f(x_0 + h) - f(x_0))\,(\|u(h)\| + \|Th\|)}{\|h\|} + \|S\|\,\xi(h) \\ &\leq \eta(f(x_0 + h) - f(x_0))\,(\xi(h) + \|T\|) + \|S\|\,\xi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

porque

$$\frac{(\|u(h)\| + \|Th\|)}{\|h\|} = \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|Th\|}{\|h\|} \leq \xi(h) + \frac{\|T\|\,\|h\|}{\|h\|} = \xi(h) + \|T\|$$

y porque $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$, $\lim_{k\to 0}\eta(k) = 0$ y $\lim_{h\to 0}\xi(h) = 0$.

□

En lo que sigue formalizamos el concepto de derivadas parciales y estudiamos la relación de las derivadas parciales con el diferencial de una función diferenciable.

Obs 7.14. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ función. Entonces podemos considerar las funciones coordenadas $f_i : E \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, de forma que

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) = \sum_{i=1}^m f_i(x)\,u_i \quad \text{para} \quad x \in E\,,$$

donde $B_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Notemos que como $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si $x \in E$ se tiene que $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Así, cada función coordenada

$$f_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \quad \text{para} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$$

es una función a valores reales que depende de n variables, $1 \leq i \leq m$. △

Definición 7.15. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : E \to \mathbb{R}^m$ y sean $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Para $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$ definimos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + t\, e_j) - f_i(x)}{t} \in \mathbb{R}$$

siempre que este límite exista, donde $B_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^n$; en este caso, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ es la derivada parcial de la i-ésima función coordenada con respecto a la j-ésima variable en el punto $x \in E$. △

Teorema 7.16. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : E \to \mathbb{R}^m$ y supongamos que f es diferenciable en $x \in E$. Entonces existen las derivadas parciales de las funciones coordenadas con respecto a cada variable en el punto $x \in E$ y se verifica,*

$$Df_x(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, u_i \in \mathbb{R}^m$$

es decir:

$$[Df_x]_{B_m, B_n} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

que es llamada matriz Jacobiana.

Demostración. Sea $1 \le j \le n$: como f es diferenciable en $x \in E$ entonces

$$f(x + t\, e_j) - f(x) = Df_x(t\, e_j) + r(t\, e_j) \quad \text{donde} \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(t\, e_j)}{t} = 0$$

(por hipótesis de diferenciabilidad, considerando $h = t\, e_j \in \mathbb{R}^n$ de forma que $h \to 0$ cuando $t \to 0$). Usando que $Df_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es lineal, la identidad anterior muestra que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\, e_j) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t\, Df_x(e_j) + r(t\, e_j)}{t} = Df_x(e_j) + \lim_{t \to 0} \frac{r(t\, e_j)}{t} = Df_x(e_j)$$

Por otro lado, podemos plantear el cálculo anterior usando las funciones coordenadas de f: en este caso

$$Df_x(e_j) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\, e_j) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f_1(x + t\, e_j) - f_1(x)}{t}, \ldots, \frac{f_m(x + t\, e_j) - f_m(x)}{t} \right)$$

Por un resultado previo sobre la existencia de límites en $\mathbb{R}^m$, concluimos que para cada $1 \le i \le m$ existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + t\, e_j) - f_i(x)}{t} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

El argumento anterior muestra que existen las derivadas parciales de las funciones coordenadas con respecto a las variables $x_1, \ldots, x_n$ en el punto $x \in E$ y que vale la identidad

$$\begin{aligned} Df_x(e_j) &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{f_1(x + t\, e_j) - f_1(x)}{t}, \ldots, \frac{f_m(x + t\, e_j) - f_m(x)}{t} \right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\; u_i \,. \end{aligned}$$

La última identidad muestra que el vector de coordenadas $[Df_x(e_j)]_{B_m} = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{i=1}^m$, que es la columna j-ésima de la matriz $[Df_x]_{B_m, B_n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. □

Obs 7.17. Consideramos las siguientes consecuencias del resultado anterior:

1. Una ventaja de las bases canónicas es la siguiente: si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces $[v]_{B_n} = (v_1, \ldots, v_n) = v$! Aprovechamos esta identidad como sigue: si $E \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in E$ entonces: dado $h = (h_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$,
$$Df_x h = [Df_x h]_{B_m} = [Df_x]_{B_m,B_n}\,[h]_{B_n} = [Df_x]_{B_m,B_n}\,h = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\,h_j\right)_{i=1}^m .$$

2. Si $g : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in (a,b)$ y tiene funciones coordenadas $g_i : (a,b) \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, entonces $[Dg_x]_{B_m,B_1} = (g_1'(x), \ldots, g_m'(x)) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. En este caso también escribimos $g'(x) = (g_1'(x), \ldots, g_m'(x))$. Usando el ítem 1., vemos que
$$Dg_x(t) = t\,g'(x)\,,\ t \in \mathbb{R} \implies \|Dg_x\|_{L(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)} = \|g'(x)\|_{\mathbb{R}^m} .$$

3. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $g : E \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x \in E$ entonces $[Dg_x]_{B_1,B_n} = (\frac{\partial g}{x_1}(x), \ldots, \frac{\partial g}{x_n}(x)) \in \mathbb{R}^{1\times n}$; en este caso también notamos $[Dg_x]_{B_1,B_n} = \nabla g(x) \in \mathbb{R}^{1\times n}$. En particular, usando el ítem 1. vemos que
$$Dg_x(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\,h_j\,,\ h = (h_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n .$$
Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz vemos que $\|Dg_x\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \le \|\nabla g(x)\|_{\mathbb{R}^n}$ norma euclídea del vector gradiente.

4. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : V \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x \in V$. Sea $W \subset \mathbb{R}^m$ abierto tal que $f(V) \subset W$ y sea $g : W \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(x) \in W$. Entonces hemos probado que la composición $g \circ f : V \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en x y $D(g\circ f)_x = (Dg)_{f(x)} \cdot Df_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Entonces
$$[D(g\circ f)_x]_{B_p,B_n} = [(Dg)_{f(x)}]_{B_p,B_m}\,[Df_x]_{B_m,B_n}$$
donde hemos considerado el producto de las matrices que representan los diferenciales de f y g. Si calculamos la entrada (i,j) del producto con la fórmula para el producto de matrices y usamos la identidad anterior
$$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \quad \text{para} \quad 1 \le i \le p\,,\ 1 \le j \le n\,.$$
(hemos usado que la entrada (i,k) de la matriz $[Dg_{f(x)}]_{B_p,B_m}$ es $\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))$ y similar para la entrada (k,j) de $[Df_x]_{B_m,B_n}$).

5. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in E$; sea $\gamma : (a,b) \to E \subset \mathbb{R}^n$ diferenciable en $t \in (a,b)$. En este caso, $f \circ \gamma : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en t. Usando las observaciones previas vemos que
$$(f\circ\gamma)'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\,\gamma_j'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)),\, \gamma'(t)\rangle .$$

$\square$

Obs 7.18. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}$. Sean $x \in E$ y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|h\| = 1$. Recordemos que en este caso definimos la *derivada direccional de f en x en la dirección h*, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,h) - f(x)}{t}$$

siempre que este límite exista. Notemos que si suponemos que f es diferenciable en x y tomamos $\gamma(t) = x + th$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico) entonces $\gamma(t) \in E$, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ es diferenciable en $t = 0$, $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = h$ (verificar) de forma que, por el ítem 5. de la observación anterior, existe

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = (f \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla f(x),\, h \rangle \,.$$

$\triangle$

En lo que sigue vamos a considerar subconjuntos convexos de $E \subseteq \mathbb{R}^n$: recordemos que en este caso, si $x,\, y \in E$ y $\lambda \in [0,1]$ entonces $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in E$. Por ejemplo, las bien conocidas $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|x - y\| < r\}$ son conjuntos convexos y abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, recordemos que hemos probado que si $g : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ es continua en $[a, b]$ y derivable (diferenciable!) en (a, b) entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $\|g(b) - g(a)\| \leq \|g'(x)\|\,(b - a)$, donde usamos la notación $g'(x) = (g_1'(x), \ldots, g_m'(x)) \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 7.19. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ convexo y abierto y sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en E. Supongamos que existe $M \geq 0$ tal que $\|Df_x\| \leq M$, para todo $x \in E$. Entonces, si $a,\, b \in E$ se tiene que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\,\|b - a\| \,.$$

Demostración. Sean $a,\, b \in \mathbb{R}^n$ fijos y definamos $\gamma : [0,1] \to E$ dada por $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$ (aquí usamos que E es convexo para garantizar que $\gamma(t) \in E$, $t \in [0,1]$). Notemos que γ es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$, de forma que $\gamma'(t) = b - a$, $t \in (0,1)$.

Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ dada por $g(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0,1]$. Entonces, como f es diferenciable en E entonces f es continua. Lo anterior muestra que g es continua en $[0,1]$ (composición de funciones continuas) y diferenciable en $(0,1)$ (composición de funciones diferenciables). Entonces podemos aplicar un hecho probado previamente: existe $x \in (0,1)$ tal que

$$\|g(1) - g(0)\| \leq \|g'(x)\|\,(1 - 0) = \|g'(x)\| \,.$$

Por un lado, notemos que $\|g(1) - g(0)\| = \|f(b) - f(a)\|$; por otro lado, usando la regla de la cadena: $Dg_x = Df_{\gamma(x)}\, D\gamma_x$. Aplicando la submultiplicatividad de la norma y las estimaciones en la observación anterior,

$$\|g'(x)\| = \|Dg_x\| \leq \|Df_{\gamma(x)}\|\,\|D\gamma_x\| = \|Df_{\gamma(x)}\|\,\|\gamma'(x)\| = \|Df_{\gamma(x)}\|\,\|b - a\| \,.$$

Las observaciones anteriores y la hipótesis (de acotación de la norma espectral de los diferenciales) muestran que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|g'(x)\| \leq \|Df_{\gamma(x)}\|\,\|b - a\| \leq M\,\|b - a\| \,.$$

$\square$

Corolario 7.20. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo; sea $f : E \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que $Df_x = 0$ para todo $x \in E$. Entonces f es constante en E.*

Demostración. Sea $x_0 \in E$ y sea $y_0 = f(x_0)$. Como f es diferenciable en E entonces es continua en E y luego el conjunto $A = \{x \in E : \ f(x) = y_0\} \subseteq E$ es cerrado (relativo) en E y no vacío. Veamos que A es también abierto en E: en efecto, sea $z \in A \subseteq E$: como E es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subseteq E$. En este caso, $z \in B_r(z)$ es un conjunto abierto y conexo y $Df_x = 0$ para $x \in B_r(z)$: aplicando el resultado anterior con $a = z$ y $b \in B_r(z)$ arbitrario y $M = 0$, vemos que $\|f(b) - f(z)\| \leq 0 \cdot \|b - z\| = 0$; en conclusión $f(b) = f(z) = y_0$, para todo $b \in B_r(z)$. Esto muestra que $B_r(z) \subseteq A$ y que $z \in A$ es punto interior. Así $A \subseteq E$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y en particular, abierto en E. Como A resulta un clopen no vacío dentro del conexo E concluimos que $A = E$ y f es constante en E. □

Definición 7.21. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en E, de forma que está definida $Df_{(\cdot)} : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Decimos que f es de clase $C^1(E)$, ó que f es continuamente diferenciable en E, si $Df_{(\cdot)} : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es continua, es decir: dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$ es tal que $\|x - y\| < \delta$ entonces $\|Df_x - Df_y\| < \varepsilon$. △

Teorema 7.22. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$. Entonces f es de clase $C^1(E)$ si y solo si para todos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ la función $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : E \to \mathbb{R}$ está definida y resulta continua en E.*

Demostración. Supongamos que $f \in C^1(E)$. En este caso $Df_{(\cdot)} : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es continua. Por la Proposición 7.6 y el Teorema 7.16 y el ítem 1. de la Observación 7.17 si $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ entonces

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \langle Df_x e_j, u_i \rangle \quad \text{para} \quad x \in E$$

es una función continua en E, donde $B_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

Para verificar la recíproca, comenzamos considerando el caso particular $m = 1$ (y después deducimos el caso general $m \geq 1$ a partir de éste). Así $f : E \to \mathbb{R}$; supongamos que para todos $1 \leq j \leq n$ la función $\frac{\partial f}{\partial x_j} : E \to \mathbb{R}$ está definida y resulta continua en E. Veamos que f es diferenciable en E: fijemos $x \in E$ y $\varepsilon > 0$. Como E es abierto, existe $0 < r_1 < 1$ tal que $B_{r_1}(x) \subseteq E$. Como las derivadas parciales son continuas en x, existe $0 < r_2 < r_1$ tal que si $\|x - y\| < r_2$ entonces $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(y)| < \frac{\varepsilon}{n^{1/2}}$, $1 \leq j \leq n$. Sea $h = \sum_{j=1}^n h_j \, e_j \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|h\|^2 = \sum_{j=1}^n h_j^2 < r_2^2$. Definimos $v_0 = 0$ y $v_k = \sum_{j=1}^k h_j e_j$, para $1 \leq k \leq n$. Notemos que

$$\|v_k\|^2 = \sum_{j=1}^k h_j^2 < r_2^2 \, , \, v_k = v_{k-1} + h_k e_k \, , \, 1 \leq k \leq n \quad \text{y} \quad v_n = h \, .$$

Además, se verifica la identidad:

$$f(x + h) - f(x) = f(x + v_n) - f(x + v_0) = \sum_{j=1}^n f(x + v_j) - f(x + v_{j-1}) \, .$$

Esto motiva a considerar las siguientes funciones: sea $\delta = (r_1^2 - r_2^2)/2 > 0$ y sea $g_j : [-\delta^{1/2}, (1+\delta)^{1/2}] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g_j(t) = f(x + v_{j-1} + t\, h_j\, e_j) \quad \text{para} \quad t \in [-\delta^{1/2}, (1+\delta)^{1/2}] \ \ , \ \ 1 \le j \le n\,.$$

Notemos que $\|v_{j-1} + t\, h_j\, e_j\| < r_1$ para $t \in [-\delta^{1/2}, (1+\delta)^{1/2}]$ y además $\|v_{j-1} + t\, h_j\, e_j\| < r_2$ si $t \in [0,1] \subset (-\delta^{1/2}, (1+\delta)^{1/2})$; en particular, la función g_j está bien definida. Además, g_j es derivable en $(-\delta^{1/2}, (1+\delta)^{1/2})$: (ojo: no sabemos que f sea diferenciable, entonces no podemos usar este hecho para probar que g_j sea derivable! así que hay que hacer la cuenta a mano)

$$\begin{aligned} g_j'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{g_j(t+s) - g_j(t)}{s} &= \lim_{s\to 0}\ h_j \cdot \frac{f(x + v_{j-1} + t\, h_j\, e_j + s\, h_j\, e_j) - f(x + v_{j-1} + t\, h_j\, e_j)}{h_j\, s} \\ &= h_j \lim_{u\to 0} \frac{f(x + v_{j-1} + t\, h_j\, e_j + u\, e_j) - f(x + v_{j-1} + t\, h_j\, e_j)}{u} \\ &= h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + v_{j-1} + t\, h_j\, e_j) \end{aligned}$$

donde hemos hecho la sustitución $h_j\, s = u$ de forma que $u \to 0$ cuando $s \to 0$, y hemos usado la definición de derivada parcial (y la hipótesis de que existen tales derivadas parciales). En particular, g_j es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$: por el teorema del valor medio, vemos que para cada $1 \le j \le n$ existe $\theta_j \in (0,1)$ tal que

$$f(x+v_j) - f(x+v_{j-1}) = g_j(1) - g_j(0) = g_j'(\theta_j)\,(1-0) = h_j\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + v_{j-1} + \theta_j\, h_j\, e_j)\,.$$

Como $\theta_j \in (0,1)$ entonces $\|v_{j-1} + \theta_j\, h_j\, e_j\| < r_2$ de forma que

$$\begin{aligned} |f(x+v_j) - f(x+v_{j-1}) - h_j\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)| &= |h_j\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + v_{j-1} + \theta_j\, h_j\, e_j) - h_j\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)| \\ &< |h_j|\, \frac{\varepsilon}{n^{1/2}} \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de r_2. Así, para $\|h\| < r_2$ podemos estimar:

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^n h_j\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)| &= |\sum_{j=1}^n [f(x+v_j) - f(x+v_{j-1}) - h_j\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)]| \\ &\le \sum_{j=1}^n |h_j|\, \frac{\varepsilon}{n^{1/2}} \le \|h\|\, (\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n})^{1/2} = \|h\|\, \varepsilon \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que si $T_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ está dada por $T_x h = \sum_{j=1}^n h_j\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - T_x h|}{\|h\|} = 0\,.$$

Así, f resulta diferenciable y $Df_x = T_x$, $x \in E$; como x era arbitrario, f es diferenciable en E. Más aún, como $Df_x e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) : E \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la Proposición 7.6 muestra que $Df_{(\cdot)} : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es continua y $f \in C^1(E)$.

Consideremos el caso general con $m \geq 1$. En este caso, tenemos $f = (f_1, \ldots, f_m) : E \to \mathbb{R}^m$ y las hipótesis garantizan que cada $f_i : E \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1(E)$; por la primer parte de la prueba, f_i resulta diferenciable para $1 \leq i \leq m$; más aún, recordemos que dado $h = (h_j)_{j=1}^n$

$$(Df_i)_x h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, h_j \quad \text{para} \quad x \in E\,,\ 1 \leq i \leq m\,.$$

Dado $x \in E$ sea $T_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dado por

$$T_x h = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, h_j \right) u_i \quad \text{para} \quad h = (h_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$$

donde $B_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Entonces, si $x \in E$ y $h \in \mathbb{R}^n$ es tal que $x + h \in E$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T_x h\|}{\|h\|} &= \left\| \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, h_j \right)}{\|h\|} u_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \frac{|f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, h_j|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0\,. \end{aligned}$$

Las observaciones anteriores muestran que f es diferenciable en $x \in E$ y $Df_x = T_x$. Finalmente, la función $Df_{(\cdot)} : E \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ resulta continua por la Proposición 7.6 porque $\langle Df_x\, e_j, u_i \rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ que es una función continua en E, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

□

En general, se pueden desarrollar nociones de regularidad de funciones vectoriales de varias variables en términos de la regularidad de las derivadas parciales de sus funciones coordenadas. En general, dado $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ función, sean $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ sus funciones coordenadas. Si suponemos que existe $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : E \to \mathbb{R}$ entonces podemos considerar las derivadas parciales de $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, que notamos

$$\frac{\partial \frac{\partial f_i}{\partial x_j}}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(x)$$

siempre que los límites correspondientes existan. Más generalmente, podemos considerar (inductivamente)

$$\frac{\partial \frac{\partial^{(r-1)} f_i}{\partial x_{j_{r-1}} \cdots\, \partial x_{j_1}}}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial^r f_i}{\partial x_k \partial x_{j_{r-1}} \cdots \partial x_{j_1}}(x) \tag{20}$$

para índices $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_{r-1}, k \leq n$; siempre que la función $\frac{\partial^{(r-1)} f_i}{\partial x_{j_{r-1}} \cdots \partial x_{j_1}}$ esté definida en un entorno abierto de x y que el límite correspondiente (a la derivada parcial con respecto a x_k) exista. Las expresiones en la Eq. (20) son las derivadas parciales de orden r con respecto a las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{r-1}}, x_k$.

Definición 7.23. *Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}^m$ función. Decimos que f es de clase $C^k(E)$ si existen todas las derivadas parciales de orden $k \geq 1$ de las funciones coordenadas de f en E, y son funciones continuas en E.* △

De forma alternativa, podemos definir las clases $C^k(E)$ de forma inductiva: con la notación de la definición anterior, $f \in C^k(E)$ (con $k \geq 2$) si y solo si las funciones $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^{k-1}(E)$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. En adelante, la clase $C^0(E) = C^0(E, \mathbb{R}^m)$ denota la clase de funciones $f : E \to \mathbb{R}^m$ que son continuas en E.

7.3 Teoremas de la función inversa e implícita

Comenzamos describiendo un concepto central para el desarrollo de los resultados de esta sección.

Definición 7.24. Sea (X, d) EM. Una función $\varphi : X \to X$ es una contracción (en (X, d)) si existe $0 < c < 1$ tal que $d(\varphi(x), \varphi(y)) \le c\, d(x, y)$, para todos x, $y \in X$. $\triangle$

Obs 7.25. Sea (X, d) EM y sea $\varphi : X \to X$ una contracción en (X, d). Entonces φ es una función uniformemente continua: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = c^{-1}\varepsilon > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(\varphi(x), \varphi(y)) \le c\, d(x, y) < \varepsilon$. $\triangle$

Continuamos verificando el siguiente principio de la contracción

Teorema 7.26. *Sea (X, d) un EM completo y sea $\varphi : X \to X$ una contracción. Entonces existe un único $p \in X$ tal que $\varphi(p) = p$ (en este caso decimos que p es un punto fijo de φ).*

Demostración. Sea $x \in E$ un punto arbitrario y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\ge 0}$ dada por: $x_0 = x$, $x_1 = \varphi(x) = \varphi(x_0)$ y en general $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ para todo $n \ge 0$. Sea $0 < c < 1$ tal que $d(\varphi(x), \varphi(y)) \le c\, d(x, y)$, para todos x, $y \in X$.

Así, $d(x_2, x_1) = d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \le c\, d(x_1, x_0)$. Argumentamos inductivamente: si suponemos que $d(x_n, x_{n-1}) \le c^{n-1}\, d(x_1, x_0)$, para $n - 1 \ge 1$ entonces

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \le c \cdot d(x_n, x_{n-1}) \le c^n d(x_1, x_0) \tag{21}$$

que muestra que la desigualdad en la Eq. (21) vale para todo $n \ge 1$.

Veamos que la sucesión $(x_n)_{n\ge 0}$ es de Cauchy: para eso, notemos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ es convergente (porque $0 < c < 1$) de forma que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \ge 1$ tal que si $m \ge n \ge n_0$ entonces $\sum_{k=n}^{m} c^k < \varepsilon$ (notemos que es una suma de términos positivos). Pero entonces, si $m \ge n \ge n_0$ se tiene que, usando varias veces la desigualdad triangular:

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \le \sum_{k=n}^{m-1} c^k\, d(x_1, x_0) < d(x_1, x_0)\, \varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario (y $d(x_1, x_0)$ está fijo), concluimos que la sucesión $(x_n)_{n\ge 0}$ es de Cauchy. Como (X, d) es EM completo, entonces existe $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. En este caso, usando que φ es una función continua (ver la Observación anterior):

$$\varphi(p) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$$

que muestra que p es un punto fijo de φ. Por otro lado, si $q \in X$ es tal que $\varphi(q) = q$ entonces $d(p, q) = d(\varphi(p), \varphi(q)) \le c\, d(p, q)$ con $0 < c < 1$. En este caso, $0 \le (c-1)\, d(p, q)$ que muestra que $d(p, q) = 0$. $\square$

En lo que sigue vamos a definir una serie de notaciones que van a ser útiles al momento de enunciar y probar los teoremas de la función inversa e implícita.

Obs 7.27. Dados $l, k \ge 1$ definimos la proyecciones a las primeras l coordenadas y a las últimas k coordenadas como las funciones

$$\begin{aligned}\pi_l :&\mathbb{R}^{l+k} \to \mathbb{R}^l \text{ dada por } \pi_l(x_1,\ldots,x_{l+k}) = (x_1,\ldots,x_l)\\ \pi_k :&\mathbb{R}^{l+k} \to \mathbb{R}^k \text{ dada por } \pi_l(x_1,\ldots,x_{l+k}) = (x_{l+1},\ldots,x_{l+k})\end{aligned}$$

Si bien la notación no es completamente clara en cuanto si nos vamos a quedar con las l primeras o las k últimas coordenadas por ejemplo, quedará claro por el contexto. △

Obs 7.28. Dados dos vectores $x = (x_1,\ldots,x_l)$ e $y = (y_1,\ldots,y_k)$ en $\mathbb{R}^l$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente, llamamos vector concatenación de x e y al vector de $\mathbb{R}^{l+k}$ dado por

$$(x|y) = (x_1,\ldots,x_l,y_1,\ldots,y_k)$$

Es claro que dado un z en $\mathbb{R}^{l+k}$ existen únicos x e y en $\mathbb{R}^l$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente que cumplen que $z = (x|y)$. Algunas otras propiedades de la concatenación son las siguientes: si x, x_2 en $\mathbb{R}^l$, y, y_2 en $\mathbb{R}^k$ y α en $\mathbb{R}$ tenemos que

- $\alpha(x|y) + (x_2|y_2) = ((\alpha x + x_2)|(\alpha y + y_2))$
- $\|(x|\vec{0}_k)\| = \|x\|$ y $\|(\vec{0}_l|y)\| = \|y\|$
- $\|(x|y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
- $\|x\|, \|y\| \leq \|(x|y)\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ahora, para una transformación lineal $T \in L(\mathbb{R}^{l+k}, \mathbb{R}^l)$ definimos T_1 y T_2 como

$$\begin{aligned}T_1 &: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l \text{ dado por } T_1(x) = T((x|\vec{0}_k)) \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^l\,;\\ T_2 &: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \text{ dado por } T_2(y) = T((\vec{0}_l|y)) \quad , \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^k\,.\end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que ambas son transformaciones lineales y que para todo par $x \in \mathbb{R}^l$ e $y \in \mathbb{R}^k$, se tiene que

$$T((x|y)) = T((x|\vec{0}_k) + (\vec{0}_l|y)) = T((x|\vec{0}_k)) + T((\vec{0}_l|y)) = T_1(x) + T_2(y)$$

y esto lo notamos $T = (T_1|T_2)$. De manera similar, si $S \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^{l+k})$ podemos definir las transformaciones lineales $S_1 = \pi_l \circ S$ y $S_2 = \pi_k \circ S$, de forma que se cumple $S(x) = (S_1(x)|S_2(x))$ para todo x en $\mathbb{R}^l$. A esta relación la notaremos

$$S = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)$$

y en ambos casos, hablaremos de concatenaciones de transformaciones lineales. Consideramos también una notación similar para matrices: si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ y $C \in \mathbb{R}^{k\times m}$ entonces podemos construir las concatenaciones de estas matrices como

$$D = (A|B) \in \mathbb{R}^{n\times(m+l)} \quad y \quad E = \left(\frac{A}{C}\right) \in \mathbb{R}^{(n+k)\times m}$$

Notemos que las hipótesis sobre los tamaños (de filas y columnas) de las matrices nos permite concatenar los bloques para formar una nueva matriz: en este sentido, hay que observar que los tamaños de las matrices permitan considerar concatenaciones. Una observación similar vale para las concatenaciones de transformaciones lineales. △

Proposición 7.29. *Sean $l, k \geq 1$ y $T \in L(\mathbb{R}^{l+k}, \mathbb{R}^l)$. Sean $T_1 \in L(\mathbb{R}^l)$ y $T_2 \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ tales que $T = (T_1|T_2)$. Entonces tenemos la siguiente relación entre las representaciones matriciales:*

$$[T]_{B_l, B_{l+k}} = ([T_1]_{B_l} \,|\, [T_2]_{B_l, B_k})$$

De forma similar, si $S \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^{l+k})$, $S_1 \in L(\mathbb{R}^l)$ y $S_2 \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k)$ son tales que $S = \binom{S_1}{S_2}$ entonces

$$[S]_{B_{l+k}, B_l} = \left(\frac{[S_1]_{B_l}}{[S_2]_{B_k, B_l}} \right)$$

Demostración: ejercicio. $\square$

Teorema 7.30 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(E)$. Si a es un punto de E tal que $(Df)_a \in L(\mathbb{R}^n)$ es un operador inversible, entonces hay dos abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que:*

1. *Por un lado, se tiene que:*
   (a) $a \in U \subseteq E$.
   (b) $b = f(a) \in V$.
   (c) $f\big|_U : U \to V$ *es una función biyectiva.*
2. *Si llamamos $g : V \to U$ a la inversa de la restricción de $f|_U$ entonces g es de clase $C^1(V)$.*
3. *Para un y en V se tiene que $(Df)_{g(y)} \in \mathcal{G}l(n)$ y se tiene que*

$$(Dg)_y = \big((Df)_{g(y)}\big)^{-1}$$

Demostración. Como $((Df)_a)^{-1}$ no es la transformación lineal nula por ser inversible, tenemos que $\|((Df)_a)^{-1}\| > 0$ y podemos comenzar llamando:

$$T = (Df)_a \quad y \quad \lambda = \frac{1}{2\|T^{-1}\|} > 0.$$

Como f es de clase $C^1(E)$ sabemos que f es continuamente diferenciable. Esto dice que existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in E,\ \|x - a\| < \delta_1 \to \|(Df)_x - (Df)_a\| < \lambda\,.$$

Además, como E es abierto, hay un $0 < \delta < \delta_1$ tal que $B_\delta(a)$ está totalmente contenida en E. Si llamamos $U = B_\delta(a)$ entonces U es un abierto convexo que contiene a a y tal que

$$x \in U \to \|x - a\| < \delta < \delta_1 \to \|(Df)_x - (Df)_a\| = \|(Df)_x - T\| < \lambda\,. \tag{22}$$

Por otro lado, si fijamos un y en $\mathbb{R}^n$, definimos la función $\phi_y : E \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi_y(x) = x + T^{-1}(y - f(x)) \quad \text{para} \quad x \in E\,.$$

Notemos que $\phi_y(x) = x$ si y solamente si $T^{-1}(y - f(x)) = \vec{0}_n$ pero como T^{-1} es un operador lineal inversible, esto es equivalente a que $y = f(x)$. Como se trata de suma y composición de funciones de clase $C^1(E)$ concluimos que ϕ_y es diferenciable y podemos calcular su diferencial en un x en E como

$$\begin{aligned}(D\phi_y)_x &= I - T^{-1}((Df)_x)\\ &= T^{-1}[T-(Df)_x]\end{aligned}$$

Tomando norma espectral a esta igualdad y usando que la norma es submultiplicativa, obtenemos una desigualdad válida para todo x en U:

$$\|(D\phi_y)_x\| = \|T^{-1}[T-(Df)_x]\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T-(Df)_x\| < \|T^{-1}\|\cdot\lambda = \frac{1}{2}$$

que muestra que $\|(D\phi_y)_x\| \leq \frac{1}{2}$, para todo $x \in U$. Como nuestro U es abierto y conexo (por ser convexo), esta desigualdad nos permite usar el Teorema 7.19 que asegura que para todo par x_1, x_2 de puntos de U (y cualquier $y \in \mathbb{R}^n$) tenemos la estimación

$$\|\phi_y(x_1)-\phi_y(x_2)\| \leq \frac{\|x_1-x_2\|}{2}\,. \tag{23}$$

A partir de esa desigualdad, podemos ver que f es inyectiva en U ya que si suponemos que $x_1, x_2 \in U$ son tales que $f(x_1)=f(x_2)=y_0$, tenemos que x_1 y x_2 son dos puntos fijos de ϕ_{y_0} y eso nos dice que

$$0 \leq \|x_1-x_2\| = \|\phi_{y_0}(x_1)-\phi_{y_0}(x_2)\| \leq \frac{\|x_1-x_2\|}{2}$$

lo cual implica que $x_1 = x_2$. Como la restricción $f|_U$ es inyectiva, bastaría ver (para probar el primer item) que $f(U)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ para poder tomarlo como V (ya que las otras dos condiciones se satisfacerían automáticamente) .

Para ver que esto es cierto, notamos que la Eq. (23) (que usamos para ver que f era inyectiva) en realidad dice que la función ϕ_y es contractiva en algún dominio adecuado.

Fijemos un y_0 en $f(U)$ y llamemos x_0 al elemento de U tal que $f(x_0)=y_0$. Como U es abierto, tenemos que para algún radio $r>0$ se cumple que $\overline{B}_r(x_0)$ está totalmente contenida en U. Veamos que en ese caso, la bola $B_{r\lambda}(y_0)$ está totalmente contenida en V aplicando el principio de la contracción a ϕ_y (recordar que de encontrarle un punto fijo a ϕ_y estaríamos encontrando que y está en la imagen de f).

Si $y \in B_{r\lambda}(y_0)$ Entonces por las propiedades de la norma, tenemos que

$$\|\phi_y(x_0)-x_0\| = \|T^{-1}(y-f(x_0))\| = \|T^{-1}(y-y_0)\| \leq \|T^{-1}\|\,\|y-y_0\| < \frac{r}{2}$$

Si además de eso, tomamos un x de $\overline{B}_r(x_0)$ podemos usar la desigualdad que cumplía ϕ_y (recordar que $\overline{B}_r(x_0) \subseteq U$) para decir que

$$\|\phi_y(x)-x_0\| \leq \|\phi_y(x)-\phi_y(x_0)\| + \|\phi_y(x_0)-x_0\| \leq \frac{\|x-x_0\|}{2} + \|\phi_y(x_0)-x_0\| < \frac{r}{2}+\frac{r}{2} = r$$

Concluimos de esta última cadena de desigualdades que al tomar un y de $B_{r\lambda}(y_0)$ queda bien definida la restricción

$$\phi_y : \overline{B}_r(x_0) \to \overline{B}_r(x_0)$$

Ya que el conjunto $\overline{B}_r(x_0)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$, ese conjunto también es completo; además, si $x, z \in \overline{B}_r(x_0) \subset U$ entonces $\|\phi_y(x) - \phi_y(z)\| \leq 1/2\|x - z\|$. Entonces, podemos usar el principio de la contracción: esto nos garantiza que hay un único x en $\overline{B}(x_0)$ tal que $\phi_y(x) = x$ que como vimos es equivalente a que $f(x) = y \in f(U)$.

Resumiendo, lo que vimos fue que dado $y_0 \in f(U)$ entonces $B_{r\lambda}(y_0)$ está totalmente contenido en $f(U)$ (para hallar el x de U que le corresponde a un y usamos el principio de contracción para una restricción de ϕ_y). Así $V = f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$; con esto, completamos el primer item.

Ahora, llamemos $g : V \to U$ a la inversa de $f|_U : U \to V$ y probemos que cumple lo que dice el tercer item. Fijamos un $y \in V = f(U)$ para comprobar que g es diferenciable allí y calculemos su diferencial. Sea $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Como V es abierto, si sumamos un vector $k \in \mathbb{R}^n$ no nulo de norma euclídea suficientemente chica a y, no nos salimos de V. Dado un tal vector k, sea $h \in \mathbb{R}^n$ (que debe ser distinto del vector nulo) tal que

$$x + h \in U \quad \text{y} \quad f(x + h) = y + k\,.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\phi_y(x + h) - \phi_y(x) &= [(x + h) + T^{-1}(y - f(x + h))] - [x + T^{-1}(y - f(x))] \\
&= h - T^{-1}(f(x + h) - f(x)) \\
&= h - T^{-1}(y + k - y) \\
&= h - T^{-1}(k)\,.
\end{aligned}$$

Lo anterior indica que

$$\|h - T^{-1}(k)\| = \|\phi_y(x + h) - \phi_y(x)\| \leq \frac{\|(x + h) - x\|}{2} = \frac{\|h\|}{2}$$

y de eso obtenemos

$$\|T^{-1}(k)\| = \|h + (T^{-1}(k) - h)\| \geq \|h\| - \|h - T^{-1}(k)\| \geq \frac{\|h\|}{2}\,.$$

Juntando esto con la desigualdad $\|T^{-1}(k)\| \leq \|T^{-1}\|\,\|k\|$, obtenemos

$$\frac{\|h\|}{2} \leq \|T^{-1}(k)\| \leq \|T^{-1}\|\,\|k\|$$

por lo que claramente si k tiende al vector nulo entonces h debe tender al vector nulo también. Otra manera de expresar esta desigualdad es la que sigue

$$\frac{1}{\|k\|} \leq \frac{2\|T^{-1}\|}{\|h\|}\,.$$

Antes de seguir, recordamos que la Eq. (22) muestra que si $x \in U$ entonces

$$\|(Df)_x - T\| < \lambda = \frac{1}{2\|T^{-1}\|} < \|T^{-1}\|^{-1}\,.$$

El Teorema 7.4 muestra que $(Df)_x$ es inversible en todo punto $x \in U$. Para ver que $(Dg)_y$ es aquel que indicamos en el enunciado (recordemos: $f(x) = y$, $f(x+h) = y+k$) escribimos

$$\begin{aligned} g(y+k) - (g(y) + (Df)_x^{-1}(k)) &= g(f(x+h)) - (g(f(x)) + (Df)_x^{-1}(k)) \\ &= h - (Df)_x^{-1}(y+k-y) \\ &= h - (Df)_x^{-1}(f(x+h) - f(x)) \\ &= -(Df)_x^{-1}[f(x+h) - f(x) - (Df)_x(h)] \end{aligned}$$

donde usamos que $g(f(x+h)) = x+h$ y $g(f(x)) = x$; podemos plantear (otra vez usando las propiedades de la norma de transformaciones lineales) las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{\|g(y+k) - (g(y) + ((Df)_x)^{-1}(k))\|}{\|k\|} &\leq \frac{2\|T^{-1}\|}{\|h\|} \, \| - ((Df)_x)^{-1} [f(x+h) - f(x) - (Df)_x(h)]\| \\ &\leq 2\|T^{-1}\| \, \| ((Df)_x)^{-1} \| \, \frac{\|f(x+h) - f(x) - (Df)_x(h)\|}{\|h\|} \end{aligned}$$

como h tiende a 0 siempre que k tiende a 0 vemos que g es diferenciable en y; además $(D_g)_y = ((Df)_x)^{-1}$ para el x que cumple $y = f(x)$ o $g(y) = x$. Esto completa la prueba del tercer item.

Resta ver que g, además de diferenciable, es continuamente diferenciable en V. Primero, recordamos que por ser diferenciable, g es continua y que la inversión $\mathcal{F} : \mathcal{G}l(n) \to \mathcal{G}l(n)$ es función continua (por el Teorema 7.4). Como f es continuamente diferenciable por hipótesis, la asignación $(Df)_{(\cdot)} : U \to \mathcal{G}l(n) \subset L(\mathbb{R}^n)$ también es continua. Finalmente, como la función

$$(Dg)_{(\cdot)} : V \to \mathcal{G}l(n) \text{ dada por } (Dg)_y = ((Df)_{g(y)})^{-1} \quad \text{para} \quad y \in V$$

puede escribirse como una composición de funciones continuas $\mathcal{F} \circ (Df)_{(\cdot)} \circ g$ concluimos que es continua en todo V como queríamos ver. □

Corolario 7.31. *Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : E \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^1(E)$ tal que $(Df)_x$ es inversible para todo x en E. Entonces f es una función abierta, es decir, para cualquier abierto U del dominio $f(U)$ es abierto.*

Demostración. Sea W un abierto de E. Si fijamos un $y \in f(W)$ sabemos que hay un x en W tal que $y = f(x)$. A partir de las hipótesis de f, podemos aplicar el teorema anterior a la función

$$f\big|_W : W \to \mathbb{R}^n$$

en el punto x por lo que existen abiertos $U_x \subset W$ y $V_x (= f\big|_W(U_x)) \subset f(W)$ con las propiedades que nos dice el teorema. Así, existe un $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(y) \subseteq V_x \subseteq f(W)$$

de donde se desprende que $f(W)$ es abierto, ya que y era arbitrario. □

En la siguiente observación, ahondamos un poco en la última parte de la demostración del teorema anterior para ver que se puede dar una expresión para las derivadas de la función que nos devuelve el teorema, a pesar de no conocer explícitamente su expresión. Además, esta observación nos dice que la función cuya existencia garantiza el teorema gana la regularidad que tenga la función de partida, cosa que es útil en las aplicaciones.

Obs 7.32. Si E es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^1(E)$ y $a \in E$ tal que $(Df)_a \in \mathcal{G}l(n)$. Entonces el teorema de la función inversa garantiza que para ciertos abiertos $U \subset E$ y V de $\mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\begin{gathered} a \in U \text{ y } f(a) \in V \\ f\big|_U : U \to V \text{ es una biyección} \\ g = \left(f\big|_U\right)^{-1} : V \to U \text{ de clase } C^1(V) \\ \forall\, y \in V,\ \ (Dg)_y = \left((Df)_{g(y)}\right)^{-1} \in L(\mathbb{R}^n) \end{gathered}$$

y usando algunas propiedades de las transformaciones lineales, tenemos que

$$[(Dg)_y]_{B_n} = \left[\left((Df)_{g(y)}\right)^{-1}\right]_{B_n} = \left[(Df)_{g(y)}\right]_{B_n}^{-1}$$

lo que permite calcular esa representación matricial de $(Dg)_y$ en todo un abierto. Si consideramos la función

$$h : U \to \mathbb{R} \text{ dada por } h(x) = \det\left([(Df)_x]_{B_n}\right) \text{ para } x \in U$$

tenemos que como f es de clase $C^1(E)$, la función h es continua y no se anula en U. Este último hecho se puede ver notando que el determinante es una expresión polinómica en términos de las entradas de la matriz. Si además de esto definimos las funciones $h_{ij} : U \to \mathbb{R}$ para $1 \leq i, j \leq n$ como

$$h_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \det(A(i|j)_x) \ \ \forall\, x \in U$$

donde las matrices $A(i|j)_x$ son los menores de $[(Df)_x]_{B_n}$, $x \in U$, vemos que $h_{ij} \in C(U)$ es una función continua para $1 \leq i,\ j \leq n$. Entonces,

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) = \left([(Dg)_y]_{B_n}\right)_{ij} = \left(\left[(Df)_{g(y)}\right]_{B_n}^{-1}\right)_{ij} = \frac{h_{ji}(g(y))}{h(g(y))}$$

por lo que en realidad, las derivadas parciales de las funciones componentes de g son de la misma clase que las de f. Por ejemplo, si f fuese de clase $C^k(U)$ tendríamos que las derivadas parciales de todas sus componentes son de clase $C^{k-1}(U)$ por lo que las funciones $h, h_{ij} \in C^{k-1}(U)$: la fórmula anterior muestra que las derivadas parciales de las funciones coordenadas de g son también de clase $C^{k-1}(V)$ (recordemos que los determinantes resultan ser funciones que tienen la misma clase que la clase de sus funciones coordenadas). $\triangle$

Podemos pensar que el objetivo del teorema de la función implícita, dados un dominio $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ y una función $f : E \to \mathbb{R}^n$ con ciertas con condiciones, es garantizar el despeje de n de las variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del dominio en términos de las otras m variables $y = (y_1, \ldots, y_m)$ de la ecuación $f(x, y) = 0$ (donde por simplicidad, lo que haremos es ver que las primeras n variables se pueden escribir como funciones de las últimas m).

Analicemos que pasa en el caso particular donde nuestra función es una transformación lineal.

Obs 7.33. Sea $T \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ y $T_1 \in L(\mathbb{R}^n), T_2 \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tales que $T = (T_1|T_2)$. Consideramos la ecuación

$$T((x|y)) = T_1(x) + T_2(y) = \vec{0}_n\,.$$

Si suponemos además que T_1 es inversible, podemos definir $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ como $g = -T_1^{-1} \circ T_2$ y ver que

- $g \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (por ser composición de transformaciones lineales)
- $\{(x|y) \in \mathbb{R}^{n+m} : T((x|y)) = \vec{0}_n\} = \{(g(y)|y) : y \in \mathbb{R}^m\}$ ya que por un lado

$$\begin{aligned} T((x|y)) &= \vec{0}_n \\ T_1(x) + T_2(y) &= \vec{0}_n \\ x &= -T_1^{-1}(T_2(y)) = g(y) \end{aligned}$$

Y si tomamos un $(g(y)|y)$ con y en $\mathbb{R}^m$ tenemos que

$$T((g(y)|y)) = T_1(g(y)) + T_2(y) = T_1(-T_1^{-1}(T_2(y))) + T_2(y) = \vec{0}_n$$

$\triangle$

Esto indica que podemos parametrizar al núcleo de T con m variables, lo cual no es muy sorprendente ya que la representación matricial en la base canónica de T debe tener rango máximo por la condición impuesta a T_1 y la proposición 7.29, por lo que el teorema de la dimensión nos dice que la dimensión del núcleo de T debe ser m.

Como dijimos, el siguiente teorema extiende este tipo de resultados al caso de funciones no lineales (con cierta suavidad). Una gran diferencia con el caso anterior, es que para funciones generales solo parametrizamos la intersección del conjunto de nivel del vector nulo con un abierto, en lugar de todo el conjunto de nivel, como pasa con las transformaciones lineales. Es decir, en general podemos afirmar que es posible realizar un despeje de forma *local*.

Teorema 7.34 (Teorema de la función implícita)**.** *Sean E un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$ y $f : E \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^p(E)$ para $p \geq 1$; sean $f_1, \ldots, f_n$ las funciones coordenadas de f. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que $(a|b) \in E$, $f((a|b)) = \vec{0}_n$.*

Si suponemos que $T = (Df)_{(a|b)} \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ verifica que $T = (T_1|T_2)$ con $T_1 \in L(\mathbb{R}^n)$ inversible (y T_2 en $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$) entonces existen dos abiertos U y W tales que

1. *$(a|b)$ está en $U \subseteq E$ y b está en $W \subseteq \mathbb{R}^m$.*
2. *Existe una función $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^p(W)$ tal que $g(b) = a$,*

$$\{(x|y) \in U : f((x|y)) = \vec{0}_n\} = \{(g(y)|y) : y \in W\}.$$

3. *$(Dg)_b = -T_1^{-1} \circ T_2 \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. La prueba que vamos a dar se basa en el teorema de la función inversa, por lo cual necesitamos alguna función que tenga como dominio y codominio abiertos del mismo espacio euclídeo. Definimos

$$F : E \to \mathbb{R}^{n+m} \text{ como } F((x|y)) = (f((x|y))\,|\,y) \quad \text{para} \quad (x|y) \in E.$$

Más concretamente, si $y = (y_1, \ldots, y_m)$ podemos escribir la acción de esta función como

$$F((x|y)) = (f_1((x|y)), \ldots, f_n((x|y)), y_1, \ldots, y_m)$$

y describir sus derivadas parciales como sigue

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}((x|y)) = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}((x|y)) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}((x|y)) = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}((x|y)) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si } n+j = i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

lo que dice que F es de clase $C^p(E)$. Para poder aplicar el teorema de la función inversa a F, tenemos que ver que su diferencial es inversible en algún punto. Como conocemos las derivadas parciales de F, podemos calcular la representación matricial de su diferencial en $(a|b)$ para ver si resulta inversible: si consideramos $z = (z_1, \ldots, z_{n+m}) = (x|y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ entonces

$$\begin{aligned}
[(DF)_{(a|b)}]_{B_{n+m}} &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}((a|b)) \right)_{1 \leq i,j \leq n+m} \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_n} & \frac{\partial F_1}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_{n+m}} \\
\frac{\partial F_2}{\partial z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial z_n} & \frac{\partial F_2}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial z_{n+m}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} & \frac{\partial F_n}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial z_{n+m}} \\
\frac{\partial F_{n+1}}{\partial z_1} & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial z_n} & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial z_{n+m}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial F_{n+m}}{\partial z_1} & \frac{\partial F_{n+m}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_{n+m}}{\partial z_n} & \frac{\partial F_{n+m}}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n+m}}{\partial z_{n+m}}
\end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{cccc|ccc}
\frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_{n+m}} \\
\frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} & \frac{\partial f_2}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_{n+m}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} & \frac{\partial f_n}{\partial z_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_{n+m}} \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{0_{m\times n}} & \multicolumn{3}{c}{Id_m}
\end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} [T_1]_{B_n} & [T_2]_{B_n,B_m} \\ \hline 0_{m\times n} & Id_m \end{array} \right)
\end{aligned}$$

donde las entradas de las matrices de los pasos intermedios deben ir evaluadas también en $(a|b)$. Como podemos calcular este determinante por bloques y tenemos que por hipótesis T_1 es inversible, confirmamos que $(DF)_{(a|b)}$ es inversible: es decir,

$$\det(DF_{(a|b)}) = \det(T_1) \cdot \det(I_m) = \det(T_1) \neq 0\,.$$

Otra opción podría ser que a partir de la expresión del diferencial que obtuvimos, podemos ver que para todo par h de $\mathbb{R}^n$ y k de $\mathbb{R}^m$ se tiene que

$$(DF)_{(a|b)}(h|k) = ((Df)_{(a|b)}(h|k) \,|\, k)\,.$$

Así, si para algún h_0 y k_0 se cumple que $(DF)_{(a|b)}(h_0|k_0) = \vec{0}_{n+m}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} T(h_0|k_0) = (Df)_{(a|b)}(h_0|k_0) = \vec{0}_n & y & k_0 = \vec{0}_m \\ & \downarrow & \\ T_1(h_0) + T_2(k_0) = \vec{0}_n & y & T_2(k_0) = \vec{0}_n \\ & \downarrow & \\ T_1(h_0) = \vec{0}_n & & \end{array}$$

pero como T_1 es inversible por hipótesis, $h_0 = \vec{0}_n$ por lo que $(h_0|k_0) = \vec{0}_{n+m}$.

Por cualquiera de los camino, concluimos que $(DF)_{(a|b)}$ es inversible y repasando vemos que cumplimos las condiciones para aplicar el teorema de la función inversa ya que

- E es un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$ y $F : E \to \mathbb{R}^{n+m}$ es una función de clase $C^p(E)$ para $p \geq 1$.
- $(a|b)$ es un punto de E tal que $(DF)_{(a|b)}$ es inversible.

y podemos garantizar la existencia de dos abiertos U y V de $\mathbb{R}^{n+m}$ tales que

– $(a|b) \in U \subseteq E\,(\subseteq \mathbb{R}^{n+m})$.

– $F|_U : U \to V$ es una biyección y $G = (F|_U)^{-1} : V \to U$ es de clase $C^p(V)$ (ver Observación 7.32).

– Vale que $F(G(v)) = v$ para todo v de V y $G(F(u)) = u$ para todo u en U.

Este abierto $U \subset E$ va a ser el que buscamos. A continuación, definimos quien va a ser el abierto $W \subset \mathbb{R}^m$ que queremos en el codominio de f. Sea $W = \{y \in \mathbb{R}^m : (\vec{0}_n|y) \in V\}$. Vemos que este conjunto es no vacio ya que

$$(a|b) \in U \to F((a|b)) = (f((a|b))\,|\,b) = (\vec{0}_n|b) \in V$$

lo que dice que b está en W. Veamos ahora que este conjunto es abierto, notando que puede escribirse como la preimagen de V por la función $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$I(v) = (\vec{0}_n|v)\ \forall\, v \in \mathbb{R}^m$$

que claramente es continua. Esto concluye la prueba del item 1.

Ahora que ya tenemos los abierto que buscábamos, vamos a definir la función que queremos para el segundo item de la siguiente manera: sean $G_1, \ldots, G_{n+m} : V \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de G, y sea

$$g : W \to \mathbb{R}^n \text{ dada por } g(y) = (G_1((\vec{0}_n|y)), \ldots, G_n((\vec{0}_n|y)))\ \ \forall\, y \in W$$

o sea, concatenamos a y con $\vec{0}_n$ (lo que nos da un vector de V por la definición de W) y luego le aplicamos G y nos quedamos con las primeras las primeras n coordenadas. La relación

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial G_i}{\partial y_j}((\vec{0}_n|y)) = \frac{\partial G_i}{\partial z_{n+j}}((\vec{0}_n|y))$$

indica que g es una función de clase $C^p(W)$ (porque G es de clase $C^p(V)$). Como $b \in W$ podemos calcular $g(b)$: recordando la cuenta que hicimos para ver que W es no vacío, tenemos

$$G((\vec{0}_n|b)) = G(F((a|b))) = (a|b)$$

por lo que $g(b) = a$ como queríamos. Nos falta ver la igualdad entre los conjuntos

$$\{(x|y) \in U : f((x|y)) = \vec{0}_n\} = \{(g(y)|y) : y \in W\}\,. \tag{24}$$

Si tomamos un $(x_0|y_0)$ en el conjunto de la izquierda, tenemos que por la definición de F

$$F((x_0|y_0)) = (\vec{0}_n|y_0) \in V \to y_0 \in W$$

$$(x_0|y_0) = G(\ F((x_0|y_0))\ ) = G((\vec{0}_n|y_0)) \to x_0 = g(y_0)$$

de lo que obtenemos que $(x_0|y_0)$ está en el conjunto de la derecha. Por otro lado, si

$$y_0 \in W \to (\vec{0}_n|y_0) \in V$$

lo que implica que para cierto k en $\mathbb{R}^m$:

$$(\vec{0}_n|y_0) = F(G((\vec{0}_n|y_0))) = F((g(y_0)|k)) = (f((g(y_0)|k))\,|\,k) \to \begin{cases} f((g(y_0)|k)) = \vec{0}_n \\ k = y_0 \end{cases}$$

de lo cual se desprende que

$$(g(y_0)|y_0) = (g(y_0)|k) = G((\vec{0}_n|y_0)) \in U$$
$$f((g(y_0)|y_0)) = f((g(y_0))|k) = \vec{0}_n$$

por lo que $(g(y_0)|y_0)$ está en $\{(x|y) \in U : f((x|y)) = 0\}$ lo que completa la prueba de la doble contención y del item 2. del teorema.

Para el último item, introducimos dos funciones auxiliares solamente con el fin de aclarar un poco los cálculos de diferenciales. Estas funciones son concretamente

$$\phi : W \to U \text{ dada por } \phi(y) = (g(y)|y) \quad \text{para} \quad y \in W$$

$$h : W \to \mathbb{R}^n \text{ dada por } h = f \circ \phi$$

Por la igualdad de conjuntos en la Eq. (24) sabemos ϕ está bien definida y que la función h es idénticamente nula. Notemos que por construcción ϕ y h son funciones diferenciables en sus dominios. Más aún, notemos que

$$(D\phi)_y = \left(\frac{(Dg)_y}{Id_m}\right) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n+m})\,.$$

Entonces, por la regla de la cadena tenemos que para cualquier $y \in W$ se tiene que

$$0_{L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = (Dh)_y = (Df)_{\phi(y)} \circ (D\phi)_y\,.$$

Si tomamos $y = b$ tenemos que

$$0_{L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = (Df)_{(a|b)} \circ (D\phi)_b = (T_1|T_2) \circ \left(\frac{(Dg)_b}{Id_m}\right) = T_1 \circ (Dg)_b + T_2$$

(verificar la identidad anterior evaluando en vectores) y como T_1 es inversible por hipótesis, podemos despejar y ver que

$$(Dg)_b = -T_1^{-1} \circ T_2\,.$$

□

Obs 7.35. Como fue el caso con el teorema de la función inversa, tenemos una relación entre las derivadas parciales de la función a la cual le aplicamos el teorema y las de la función cuya existencia demostramos con el teorema.

Siguiendo las notaciones del teorema anterior,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b)\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} = [(Dg)_b]_{B_nB_m} &= [-T_1^{-1}\circ T_2]_{B_nB_m}\\ &= -\left([(T_1]_{B_n}\right)^{-1}[T_2]_{B_nB_m}\\ &= -\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a|b)\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le n}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_l}(a|b)\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le l\le m}}\end{aligned}$$

lo que permite relacionar las derivadas de la función f con las derivadas de la función que nos da el teorema. Una diferencia con el caso del teorema de la función inversa es que esta relación solo se da en el punto que usamos para aplicar el teorema en lugar de todo un abierto alrededor de este.

Como caso particular, si E es una abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : E \to \mathbb{R}$ es de clase $C^p(E)$ para $p \geq 1$ y a, b son dos reales tales que $(a, b) \in E$ y el gradiente de f en ese punto tiene primera entrada no nula, podemos proponer T_1, T_2 como los operadores de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dados por

$$T_1(h) = \frac{\partial f}{\partial x}((a,b))\,h \quad y \quad T_2(k) = \frac{\partial f}{\partial y}((a,b))\,k$$

y aplicar el teorema de la función implícita para obtener un entorno de a, uno de b y una función que los une g, tal que $g(b) = a$ y como la matriz que representa a T_1 tiene una sola entrada obtenemos la relación

$$g'(b) = -\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}\right).$$

Esta observación podría usarse, por ejemplo, para calcular la recta tangente a una curva del plano dada mediante una ecuación. △

7.4 Ejercicios

Obs 7.36. En esta práctica vamos a utilizar también la notación para la Definición 1.15. del apunte teórico siguiendo a la notación del libro de Rudin página 231, sección 9.16:

$$(D_jf_i)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{f_i(\mathbf{x}+te_j) - f_i(\mathbf{x}))}{t}$$

Ejercicio 138. Demostrar que a cada $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ le corresponde un único $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = xy$. Demostrar que también $\|A\| = |y|$.

Ejercicio 139. Supongamos que f es una función real diferenciable en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, y que f tiene un máximo local en un punto $x \in E$. Demostrar que $f^{'}(x) = 0$.

Ejercicio 140. Sea $f(u, v) = (u - uv, uv)$. Encontrar la transformación inversa.

Ejercicio 141. Sea
$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{1 - x_1 - x_2}, \frac{x_2}{1 - x_1 - x_2}\right).$$

a) Hallar la matriz
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i\leq 2,\, 1\leq j\leq 2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
del Teorema 1.16 del apunte teórico.

b) Hallar la transformación inversa y su correspondiente matriz como en el item anterior.

Ejercicio 142. Si f es una función diferenciable en un conjunto abierto conexo $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, y $f^{'}(x) = 0$ para todo $x \in E$. Demostrar que f es constante en E.

Ejercicio 143. Probar que si
$$f(t) = t + 2t^2 sen\left(\frac{1}{t}\right)$$
para $t \neq 0$ y además $f(0) = 0$, entonces $f^{'}(0) = 1$, $f^{'}$ es acotada en $(-1, 1)$ pero f no es biyectiva en cualquier entorno del 0.

Ejercicio 144. Sea $f(x_1, x_2) = (e^{x_1}\cos(x_2), e^{x_1} sen(x_2))$ una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

a) ¿Cuál es el rango de f?

b) Mostrar que la matriz
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i\leq 2,\, 1\leq j\leq 2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
(del Teorema 1.16 del apunte teórico) de f no es 0 en ningún punto de $\mathbb{R}^2$. Entonces cada punto de $\mathbb{R}^2$ tiene un entorno en la que f es biyectiva, sin embargo f no es biyectiva en $\mathbb{R}^2$.

c) Sea $a = (0, \pi/3), b = f(a)$, sea g el inverso continuo de f, definido en un entorno de b tal que $g(b) = a$. Determinar una fórmula explícita para g, calcular también $f^{'}(a)$ y $g^{'}(b)$.

Contestar las mismas preguntas para $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Ejercicio 145. Sea f dada por
$$f(x, y_1, y_2) = x^2 y_1 + e^x + y_2.$$
Probar que $f(0, 1, -1) = 0$, $(D_1 f)(0, 1, -1) \neq 0$ y que existe por lo tanto una función diferenciable g en algún entorno de $(1, -1)$ tal que $g(1, -1) = 0$ y
$$f(g(y_1, y_2), y_1, y_2) = 0.$$
Hallar $(D_1 g)(1, -1)$ y $(D_2 g)(1, -1)$.

Ejercicio 146. Sea
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
Demostrar

1. f, D_1f, D_2f son continuas en $\mathbb{R}^2$.

2. $D_{12}f$ y $D_{21}f$ existen para todo punto de $\mathbb{R}^2$ y son continuas excepto en $(0,0)$.

3. $D_{12}f(0,0) = 1, D_{21}f(0,0) = -1$.

Ejercicio 147. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probar que f tiene derivadas parciales en todo punto y que sin embargo f no es continua en el origen de coordenadas.

Ejercicio 148.

a) Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con derivadas parciales acotadas. Probar que f es uniformemente continua.

b) Supongamos ahora que f está definida sólo en un abierto $E \subset \mathbb{R}^n$. Probar que f es continua en E, pero no necesariamente uniformemente continua.

Ejercicio 149. Supongamos que $f = (u,v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función C^1 y $f(t_0) = (x_0, y_0)$. Probar que si $f^{'}(t_0) \neq 0$ entonces o bien existe una función C^1 g tal que $g(x_0) = t_0$ y $u(g(x)) = x$ en un entorno de x_0, o bien existe una función C^1 h tal que $h(y_0) = t_0$ y $v(h(y)) = y$ en un entorno de y_0.

Ejercicio 150. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo y sea $f(x) = L(x) + g(x)$ una función $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Probar que si $\|g(x)\| \leq M\|x\|^2$, entonces f es localmente invertible en un entorno del origen de coordenadas.

Ejercicio 151. Supongamos que f es una función a valores reales definida en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, y que las derivadas parciales $D_1f, \ldots, D_nf$ son acotadas en E. Probar que f es continua en E.

Ejercicio 152. Sea $f(x_1,x_2,x_3) = (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3))$ donde

$$f_k(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_k}{1+x_1+x_2+x_3}, \qquad k = 1,2,3,$$

con $x_1+x_2+x_3 \neq -1$. Probar que

$$\det Df(x_1,x_2,x_3) = (1+x_1+x_2+x_3)^{-4}.$$

Probar que f es biyectiva y calcular f^{-1} explícitamente.

Ejercicio 153. Mostrar que cerca del punto $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$ podemos resolver

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

de manera única para u y v como funciones de x e y. Calcular $(\partial u/\partial x)(1,1)$.

8 Ecuaciones diferenciales ordinarias

En este capítulo vamos a estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, ecuaciones que relacionan una función de una variable real con sus derivadas. Vamos a considerar también sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones iniciales.

8.1 Primeras consideraciones

Comencemos considerando una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden de la forma

$$F(x, y, y') = 0$$

donde $E \subseteq \mathbb{R}^3$ y $F : E \to \mathbb{R}$ es una función continua en E. En este caso, una *solución* de la ecuación es una función $\phi : I \to \mathbb{R}$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto, ϕ es diferenciable en I, $(x, \phi(x), \phi'(x)) \in E$ para $x \in I$ y se verifica que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0 \quad \text{para} \quad x \in I\,.$$

Por ejemplo, consideremos $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua. En este caso podemos plantear la EDO de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

que equivale a la EDO de primer orden $F(x, y, y') = 0$ con $F(x, y, y') = f(x, y) - y'$. En este caso, decimos que la EDO está en *forma normal.* Una solución de la ecuación anterior es una función $\phi : I \to \mathbb{R}$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto, ϕ es diferenciable en I, $(x, \phi(x)) \in U$, $x \in I$ y vale que

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{para} \quad x \in I\,.$$

Volviendo al caso general, dada la ecuación $F(x, y, y') = 0$, donde $F : E \to \mathbb{R}$ es una función continua en $E \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos pedir además condiciones adicionales a las soluciones: por ejemplo, podemos considerar aquellas soluciones de la ecuación que además satisfagan condiciones del tipo $y(x_0) = y_0$ (de forma que las soluciones $\phi : I \to \mathbb{R}$ también cumplen con la condición: $x_0 \in I$, $\phi(x_0) = y_0$).

Ejemplo 8.1. Consideremos la EDO de primer orden dada por $y' = y^2$. Esta ecuación está en forma normal, para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^2$. Notemos que en este caso, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Además, consideramos la restricción $y(1) = -1$.

Si consideramos la función $\phi(x) = -x^{-1}$, $x \in I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces: I es abierto, ϕ es diferenciable en I y se verifica

$$\phi'(x) = \frac{1}{x^2} = (-\frac{1}{x})^2 = \phi^2(x) \quad \text{para} \quad x \in I$$

Además, $\phi(1) = -1$. En este caso, ϕ es solución a la EDO con condición inicial

$$y' = y^2 \quad \text{y} \quad y(1) = -1\,.$$

Notemos que la solución ϕ no está definida en todo $\mathbb{R}$ aún cuando la EDO está definida en todo $\mathbb{R}^2$. △

Obs 8.2. Consideremos una EDO de primer orden en forma normal $y' = f(x, y)$, para $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $U \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y f es continua en U. Supongamos que $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación, es decir, $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ para $x \in (a, b)$.

Consideremos la función $G : U \to \mathbb{R}^2$ dada por $G(x, y) = (1, f(x, y))$, $(x, y) \in U$. Podemos considerar a G como un campo vectorial definido en U, que a cada $(x, y) \in U$ le asigna el vector (anclado en (x, y)) dado por $G(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por otro lado, consideremos la curva en U dada por $\gamma : (a, b) \to U$ dada por $\gamma(x) = (x, \phi(x))$, $x \in (a, b)$. Notemos que esta curva es una línea de flujo del campo G, en el sentido que

$$\gamma'(x) = G(\gamma(x)) \quad \text{para} \quad x \in (a, b)\,.$$

En efecto, $\gamma'(x) = (1, \phi'(x)) = (1, f(x, \phi(x))) = G(x, \phi(x)) = G(\gamma(x))$, $x \in (a, b)$. Esto permite interpretar *geométricamente* las soluciones de EDO's en forma normal. $\triangle$

En lo que sigue vamos a considerar dos tipos importantes de EDO's (que tienen normbre propio) y vamos a ver algunas técnicas específicas para resolverlas. Hay otras clases especiales de EDO's de primer orden que no consideramos aquí. Más adelante vamos a volver al caso de EDO's generales.

Ecuaciones de variables separadas. En este contexto consideramos la ecuación (de variables separadas)

$$h(y) \cdot y' = g(x)$$

donde $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Sea $I \subset [a, b]$ intervalo abierto y supongamos que $\phi : I \to (c, d)$ es una solución de la ecuación anterior. Entonces,

$$h(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = g(x) \quad \text{para} \quad x \in I\,.$$

Lo anterior motiva considerar la función $H : [c, d] \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(y) = \int_c^y h(t)\ dt \implies (H \circ \phi)'(x) = H'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = h(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = g(x)\ ,\ x \in I\,,$$

donde hemos usado que h es función continua y la relación entre la integral de Riemann y la diferenciación (ver cap. 5). Más aún, si consideramos $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$G(z) = \int_a^z g(t)\ dt \implies (H \circ \phi)'(x) = G'(x) \quad \text{para} \quad x \in I\,.$$

La identidad anterior y el hecho de que I sea intervalo abierto muestran que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$H(\phi(x)) = G(x) + \alpha\,,\ x \in I\,.$$

Si definimos la función $K(x, y) : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ dada por $K(x, y) = H(y) - G(x) - \alpha$ entonces $K \in C^1((a, b) \times (c, d))$ y vemos que la función ϕ satisface la ecuación $K(x, \phi(x)) = 0$ para $x \in I$. Notemos que K ha sido construida usando las funciones *conocidas* g y h (a través de sus primitivas).

Supongamos que la ecuación $K(x, y) = 0$ define implícitamente a la variable y como función de x alrededor de $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$; concretamente, supongamos que $\frac{\partial K}{\partial y}(x_0, y_0) = h(y_0) \neq 0$. En este caso, el teorema de la función implícita garantiza que podemos despejar localmente la (única) solución $\phi(x) : (a', b') \to \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in (a', b')$, $\phi \in C^1((a', b'))$, $\phi(x_0) = y_0$ y $K(x, \phi(x)) = 0$. La unicidad del despeje de la ecuación $K(x, y) = 0$ alrededor de (x_0, y_0) determina a la solución ϕ. Estas observaciones motivan el siguiente

Teorema 8.3. *Sean $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y consideremos la EDO de primer orden de variables separadas $h(y) \cdot y' = g(x)$. Sean*

$$G(x) = \int_a^x g(t)\ dt\,,\ x \in [a,b] \qquad y \qquad H(y) = \int_c^y h(t)\ dt\,,\ y \in [c,d]\,.$$

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$ tales que $H(y_0) = G(x_0) + \alpha$ y $h(y_0) \neq 0$. Entonces existe un intervalo abierto $x_0 \in I \subset [a,b]$ y existe $\phi : I \to (c,d)$ tal que $\phi \in C^1(I)$ es solución de la EDO, y además satisface que $\phi(x_0) = y_0$.

Demostración. Con las notaciones del enunciado, consideremos $K : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ dada por $K(x,y) = H(y) - G(x) - \alpha$. Entonces $K \in C^1((a,b) \times (c,d))$. Por construcción $K(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial K}{\partial y}(x_0, y_0) = h(y_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita existe un intervalo abierto $x_0 \in I \subset (a,b)$ y existe $\phi : I \to (c,d)$ tal que $\phi \in C^1(I)$, $\phi(x_0) = y_0$ y $K(x, \phi(x)) = 0$, $x \in I$; en particular, derivando la última identidad vemos que

$$0 = (K(x,\phi(x))' = \frac{\partial K}{\partial x}(x,\phi(x)) + \frac{\partial K}{\partial y}(x,\phi(x)) \cdot \phi'(x) = g(x) - h(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,.$$

□

Volviendo al argumento previo al teorema, hemos visto que una solución de la ecuación de variables separadas está (bajo ciertas condiciones) determinada implícitamente por una ecuación que involucra las funciones que corresponden a la EDO. Este hecho se puede usar para probar la *unicidad* (al menos de forma local) de las soluciones de la ecuación con condición adicional $y(x_0) = x_0$.

Ejemplo 8.4. Volvamos a considerar la EDO del Ejemplo 8.1

$$y' = y^2 \implies \frac{1}{y^2} \cdot y' = 1$$

de forma que $h(y) = y^{-2}$ para $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. En este caso $H(y) = -y^{-1}$ y $G(x) = x$; si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación $H(y) = G(x) + \alpha$ es $-y^{-1} = x + \alpha$ lo que muestra que $y = -(x+\alpha)^{-1}$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. De esta forma obtenemos una familia de soluciones que depende de $\alpha \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la solución trivial $y = 0$ (función constantemente igual a 0) no forma parte de esta familia, porque al interpretar la ecuación como una ecuación de variables separadas hemos dividido por y^2 (que fuerza a restringirse al caso en que $y \neq 0$). △

Ecuaciones exactas. Consideremos la ecuación

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$$

donde $M, N : R = (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en el rectángulo abierto $R \subset \mathbb{R}^2$. Decimos que la ecuación es exacta si existe $f : R \to \mathbb{R}$ tal que $f \in C^1(R)$, $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Sea I un intervalo abierto y $\phi : I \to \mathbb{R}$ una solución de la ecuación exacta anterior: es decir, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x)) \cdot \phi'(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in I\,.$$

Definamos la función $g(x) = f(x, \phi(x))$ y notemos que por la regla de la cadena tenemos que

$$g'(x) = \langle \nabla f(x, \phi(x)) \, , (1, \phi'(x)) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in I \, .$$

En este caso, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, \phi(x)) = g(x) = \alpha$, para $x \in I$. Supongamos que $x_0 \in I$ y $(x_0, y_0) \in R$ son tales que $f(x_0, y_0) = \alpha$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Nuevamente por el teorema de la función implícita, vemos que la ecuación $f(x, \phi(x)) = \alpha$ determina a $\phi(x)$ en un entorno de $x_0 \in I$. Estas observaciones motivan el siguiente resultado

Teorema 8.5. *Sea $f : R = (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(R)$ y consideremos la EDO (exacta)*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot y' = 0 \, .$$

Sean $(x_0, y_0) \in R$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_0, y_0) = \alpha$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe un intervalo abierto $x_0 \in I \subset (a, b)$ y $\phi : I \to (c, d)$ tal que $\phi \in C^1(I)$, $\phi(x_0) = y_0$ y ϕ es solución de la EDO.

Demostración. Con las notaciones del enunciado, notemos que el teorema de la función implícita garantiza la existencia de un intervalo abierto $x_0 \in I \subset (a, b)$ y una función $\phi : I \to (c, d)$ tal que $\phi(x_0) = y_0$, $\phi \in C^1(I)$ y $f(x, \phi(x)) = \alpha$, para $x \in I$. Derivando la última identidad y usando regla de la cadena, concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in I \, .$$

Este último hecho muestra que ϕ es solución de la EDO.

□

Volviendo al argumento previo al teorema, hemos visto que una solución de la ecuación exacta está (bajo ciertas condiciones) determinada implícitamente por una ecuación que involucra las funciones que corresponden a la EDO. Como antes, esto se puede usar para probar la *unicidad* (al menos de forma local) de las soluciones de la ecuación con condición adicional $y(x_0) = x_0$.

Ejemplo 8.6. Consideremos la EDO dada por $x + y \cdot y' = 0$ con condición $y(y_0) = x_0$. En este caso, nos podemos preguntar si existe $f(x, y) : R \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y$. Para tratar de verificar la existencia de una tal función, argumentamos como en análisis 2, cuando queríamos calcular una función potencial de un campo conservativo!

Si asumimos que existe f como antes, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \implies f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$$

donde hemos *integrado* con respecto a x para obtener la segunda identidad. En este caso,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y \quad \text{y} \quad f(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y) \implies g'(y) = y \, .$$

En este último caso deducimos que $g(y) = \frac{y^2}{2} + c$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Podemos elegir $c = 0$ y concluir que

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \text{con} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ,$$

es la función buscada (en este paso, siempre conviene verificar que efectivamente las derivadas parciales de f satisfacen las ecuaciones requeridas).

En este caso, consideramos $\alpha \geq 0$ que verifique la ecuación $f(x_0, y_0) = \alpha$ es decir, $\alpha = \frac{x_0^2+y_0^2}{2} \geq 0$. Notemos que si $y_0 \neq 0$ (de forma que $\alpha > 0$) entonces podemos despejar localmente la variable y de la ecuación anterior y concluir que

$$\phi(x) = (2\,\alpha - x^2)^{1/2} \quad \text{para} \quad x \in I = (-\sqrt{2\alpha}\,, \sqrt{2\alpha})\,.$$

$\triangle$

Volviendo a una ecuación exacta general, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot y' = 0$, notemos que las soluciones ϕ dan lugar a curvas $\gamma(x) = (x, \phi(x)) \in R$ tales que $f(\gamma(x)) = \alpha$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir, las curvas $\gamma(x)$ toman valores dentro de la curva de nivel de la función f a altura α. En este caso, el vector gradiente $\nabla f(x, \phi(x))$ resulta ortogonal al vector velocidad $\gamma'(x)$ en cada $x \in I$.

Obs 8.7. En general, no es evidente cuando una ecuación $M(x, y)+N(x, y)\cdot y' = 0$ es exacta (en el sentido que mencionamos más arriba). Supongamos que existe una función $f : R \to \mathbb{R}$ de clase $f \in C^2(R)$ (segundas derivadas parciales continuas) tal que $M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. En este caso se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \implies \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

Esta última condición sobre las funciones M y N es útil para estudiar si la EDO es exacta. $\triangle$

Teorema 8.8. *Sea $R = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ y sean $M, N : R \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(R)$. La EDO de primer orden $M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0$ es exacta si y solo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ en R.*

Demostración. Este es un resultado que se desarrolla en Análisis 2 (considerando, incluso, regiones más generales: aquellas llamadas abiertas y simplemente conexas) de forma que vamos a dar un breve resumen de la prueba. Como hemos mencionado en la Observación 8.7, si la ecuación es exacta entonces se verifican las condiciones $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ en R.

Recíprocamente, si vale que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ en R, entonces consideramos la función $F : R \to \mathbb{R}$ construida como sigue: fijamos $(x_0, y_0) \in R$ y definimos

$$F(x, y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\; dt + \int_{x_0}^{x} M(s, y)\; ds \quad \text{para} \quad (x, y) \in R\,.$$

Notemos que el hecho de que R sea un rectángulo abierto en $\mathbb{R}^2$ garantiza que podemos considerar las integrales indicadas (hacer un dibujo de las regiones de integración involucradas en las integrales).

Así, la función F está bien definida: más aún, en este caso

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

en donde hemos derivado con respecto al límite superior de la segunda integral. Por otro lado, también podemos representar a la función $F(x, y)$ de la siguiente forma:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\; ds + \int_{y_0}^{y} N(x, t)\; dt \quad \text{para} \quad (x, y) \in R\,. \tag{25}$$

En efecto, restando las dos expresiones propuestas para representar a $F(x,y)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\;dt + \int_{x_0}^{x} M(s,y)\;ds - \left(\int_{x_0}^{x} M(s,y_0)\;ds + \int_{y_0}^{y} N(x,t)\;dt\right)\\ = \int_{x_0}^{x} (M(s,y)-M(s,y_0))\;ds - \int_{y_0}^{y} (N(x,t)-N(x_0,t))\;dt\\ = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial M}{\partial y} M(s,t)\;dt\;ds - \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}(s,t)\;ds\;dt\\ = \int\int_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} M(s,t) - \frac{\partial N}{\partial x}(s,t)\right)\;dA = 0\end{aligned}$$

en donde hemos usado el teorema fundamental del cálculo y el teorema de Fubini (las dos integrales iteradas corresponden a la integral en el rectángulo R) en el producto cartesiano de los intervalos determinados por x, x_0 y por y, y_0.

Así, usando la representación de F dada por la Eq. (25) podemos ver que $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ en R. $\square$

8.2 Reformulación del problema $y' = f(x,y)$

Sea $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y consideremos la EDO de primer orden (en forma normal) con condición inicial

$$(P)\;\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{para } x_0 \in [a,b]\end{cases}$$

Consideremos una función $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\phi \in C^1((a,b))$, de forma tal que ϕ es solución del problema (P), es decir:

$$\phi'(x) = f(x,\phi(x)) \quad \text{para} \quad x \in (a,b) \quad \text{y} \quad \phi(x_0) = y_0\,.$$

En este caso, por el Teorema fundamental del Cálculo, vemos que

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} \phi'(t)\;dt + y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\;dt + y_0 \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,.$$

Recíprocamente, supongamos ahora que $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface la ecuación

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\;dt + y_0 \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,. \tag{26}$$

Entonces, utilizando los resultados sobre derivadas e integrales que hemos probado, concluimos que

$$\exists\phi'(x) = f(x,\phi(x)) \quad \text{para} \quad x \in (a,b) \quad \text{y} \quad \phi(x_0) = y_0$$

porque el integrando $f(t,\phi(t))$ es una función continua de la variable $t \in [a,b]$. Es decir, si $\phi \in C([a,b])$ satisface la ecuación Eq. (26) entonces ϕ es solución del problema (P).

Las observaciones anteriores sugieren considerar el operador integral $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ (notemos que el dominio del operador T es el espacio de funciones continuas en $[a,b]$) dado por

$$(T\psi)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))\;dt + y_0 \quad \text{para} \quad x \in [a,b] \quad \text{y} \quad \psi \in C([a,b])$$

donde $x_0 \in [a,b]$ y $y_0 \in \mathbb{R}$. Notemos que T está bien definido como función, ya que hemos probado que funciones del tipo $T\psi$ están bien definidas (el integrando es continuo, de forma que es integrable) y son funciones continuas en $[a,b]$. Más aún, $\phi \in C([a,b])$ es solución de (P) si y solo si ϕ es un *punto fijo* del operador T es decir, $T\phi = \phi$ (que equivale a la identidad en la Eq. (26)).

En lo que sigue, vamos a considerar una serie de condiciones sobre la función f que van a garantizar que el operador asociado T tenga puntos fijos en $C([a,b])$.

Definición 8.9. *Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz en la segunda variable, con constante (de Lipschitz) $L \geq 0$ si para todos $x \in [a,b]$, y, $z \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq L\,|y - z|\,.$$

$\triangle$

Dada $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, vamos a considerar $[a,b] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ como subespacio métrico. Es este caso, tiene sentido considerar la continuidad de f.

Por otro lado, recordemos que si ψ, $\phi \in C([a,b])$ (con lo que $\psi - \phi \in C([a,b])$) entonces está definida

$$d_\infty(\psi,\phi) = \sup\{|\psi(x) - \phi(x)| \ : \ x \in [a,b]\} = \|\psi - \phi\|_\infty$$

donde hemos usado que una función continua a valores reales definida en un compacto alcanza sus valores máximo y mínimo. Más aún, $(C([a,b]), d_\infty)$ es un espacio métrico *completo*.

Lema 8.10. *Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable, con constante de Lipschitz $L \geq 0$, y sea $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ dado por*

$$(T\psi)(x) = \int_a^x f(t,\psi(t))\ dt + y_0 \qquad \textit{para} \qquad x \in [a,b]\,. \tag{27}$$

Sean ψ, $\phi \in C([a,b])$ tales que si $x \in [a,b]$ entonces $|\psi(x) - \phi(x)| \leq M\,\frac{(x-a)^k}{k!}$ para algún $k \geq 0$ y algún $M \geq 0$. Entonces,

$$|(T\psi)(x) - (T\phi)(x)| \leq L\,M\,\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \textit{para} \qquad x \in [a,b]\,.$$

En particular, $T : (C([a,b]), d_\infty) \to (C([a,b]), d_\infty)$ es función uniformemente continua.

Demostración. Sean T, ψ y ϕ como en el enunciado. Entonces

$$\begin{aligned}
|(T\psi)(x) - (T\phi)(x)| &= \left|\int_a^x f(t,\psi(t))\ dt - \int_a^x f(t,\phi(t))\ dt\right| \\
&= \left|\int_a^x f(t,\psi(t)) - f(t,\phi(t))\ dt\right| \\
&\leq \int_a^x |f(t,\psi(t)) - f(t,\phi(t))|\ dt \leq \int_a^x L\ |\psi(t) - \phi(t)|\ dt \\
&\leq L\ \int_a^x M\,\frac{(t-a)^k}{k!}\ dt = L\,M\,\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}\,\Big|_{t=a}^{t=x} = L\,M\,\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Finalmente, si ψ, $\phi \in C([a,b])$ entonces tomando $k=0$ y $M = d_\infty(\psi,\phi)$ entonces se verifica que (notemos que $(x-a)^0 = 1$, $0! = 1$)

$$|\psi(x) - \phi(x)| \leq M \, \frac{(x-a)^0}{0!} \implies |T\psi(x) - T\phi(x)| \leq L\,M\,\frac{(x-a)^1}{1} \leq M\,(b-a)\,.$$

Si recordamos que elegimos $M = d_\infty(\psi,\phi)$ entonces tomando supremos sobre $x \in [a,b]$ en la segunda desigualdad concluimos que

$$d_\infty(T\psi, T\phi) \leq L\,M\,(b-a) = L\,d_\infty(\psi,\phi)\,(b-a)$$

que muestra que T es uniformemente continua (dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon\,(L\,(b-a))^{-1}$ se tiene que si $d_\infty(\psi,\phi) < \delta$ entonces $d_\infty(T\psi,T\phi) < \varepsilon$). □

Teorema 8.11 (global de Picard)**.** *Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable. Dada la EDO de primer orden con condición inicial*

$$(P) \quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

entonces existe una única $\phi \in C([a,b])$ tal que $\phi(a) = y_0$, $\phi \in C^1((a,b))$ y $\phi'(x) = f(x,\phi(x))$, $x \in (a,b)$.

Demostración. Consideremos el operador T definido en la Eq. (27). De forma similar a lo mencionado al comienzo de esta sección, dada una función $\phi \in C([a,b])$ entonces: $\phi(a) = y_0$, $\phi \in C^1((a,b))$ y $\phi'(x) = f(x,\phi(x))$, $x \in (a,b)$, si y solo si $T\phi = \phi$ (verificar en detalle).

Así, para probar la existencia de una solución ϕ del problema (P) (en el sentido anterior) vamos a mostrar que T tiene un punto fijo en $C([a,b])$. Para eso, vamos a usar un argumento formalmente similar al que hemos usado para probar la existencia de puntos fijos de contracciones estrictas en espacios métricos completos (que probamos en el Capítulo 7).

Comenzamos definiendo la función constante $\phi_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_0(x) = y_0$, $x \in [a,b]$. A partir de ϕ_0 definimos una sucesión de funciones $(\phi_k)_{k\geq 0}$ dadas por

$$\phi_{k+1}(x) = T\phi_k(x) = \int_a^x f(t,\phi_k(t))\,dt + y_0 \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,,\ k \geq 0\,.$$

Por construcción, cada $\phi_k \in C([a,b])$, $k \geq 0$. Sea L la constante de Lipschitz de f y sea $M = \sup\{|f(t,y_0)| \,:\, t \in [a,b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (notemos que la función $h(t) = |f(t,y_0)|$ es continua en el compacto $[a,b]$ de forma que el supremo anterior es en realidad un máximo y en particular, está en $\mathbb{R}_{\geq 0}$). Notemos que entonces, si $x \in [a,b]$:

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| \;=\; \left|\int_a^x f(t,y_0)\,dt\right| \leq \int_a^x |f(t,y_0)|\,dt \leq M\,\frac{(x-a)^1}{1!}\,.$$

Por el lema anterior, vemos que

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| = |T\phi_1(x) - T\phi_0(x)| \leq L\,M\,\frac{(x-a)^2}{2!} \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,.$$

$$|\phi_3(x) - \phi_2(x)| = |T\phi_2(x) - T\phi_1(x)| \leq L^2\,M\,\frac{(x-a)^3}{3!} \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,.$$

En general, usando el lema anterior e inducción en $k \geq 1$ concluimos que

$$|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)| = |T\phi_k(x) - T\phi_{k-1}(x)| \leq \underbrace{L\,L^{k-1}}_{=L^k}\; M\, \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,.$$

Podemos utilizar las estimaciones anteriores para concluir que si $1 \leq n \leq m$ entonces

$$\begin{aligned} |\phi_m(x) - \phi_n(x)| &= |\sum_{k=n}^{m-1} \phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k\, M\, \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(L\,(x-a))^k}{k!} \\ &\leq \frac{M}{L} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(L\,(b-a))^k}{k!} \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b]\,. \end{aligned}$$

Como la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L(b-a))^k}{k!} = e^{L(b-a)}$ converge entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(L\,(b-a))^k}{k!} < \varepsilon\,.$$

Teniendo en cuenta las dos últimos estimaciones, vemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces

$$\|\phi_m - \phi_n\|_\infty \leq \varepsilon\,.$$

Lo anterior indica que la sucesión $(\phi_k)_{k\geq 0}$ es de Cauchy en el espacio métrico $(C([a,b], d_\infty)$. Como este es un espacio métrico completo, concluimos que existe $\phi \in C([a,b])$ tal que $\lim_{k\to\infty} \phi_k = \phi$ (con respecto a la métrica d_∞, es decir, con respecto a la convergencia uniforme). Como la función T es continua en $(C([a,b], d_\infty)$ vemos que

$$T\phi = T(\lim_{k\to\infty} \phi_k) = \lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = \lim_{k\to\infty} \phi_{k+1} = \phi$$

donde hemos usado la definición de ϕ_{k+1}, $k \geq 0$. Lo anterior muestra que $T\phi = \phi$, es decir, ϕ es un punto fijo de T; así, ϕ es solución del problema (P), en el sentido que hemos mencionado previamente.

Veamos la unicidad: Si $\psi \in C([a,b])$ es otra solución de (P) entonces $T\psi = \psi$. En este caso, si $x \in [a,b]$ entonces (considerando las composiciones $T^{k+1} = T^k \circ T$, $k \geq 1$)

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^0}{0!} \implies |T\phi(x) - T\psi(x)| \leq L\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^1}{1!}$$

$$\implies |T^2\phi(x) - T^2\psi(x)| \leq L^2\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^2}{2!}$$

y en general vale que si $x \in [a,b]$,

$$|T^k\phi(x) - T^k\psi(x)| \leq L^k\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^k}{k!} \leq \|\phi - \psi\|_\infty \frac{(L\,(b-a))^k}{k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

(verificar por inducción: ejercicio!). Usando la estimación anterior y notando que $T\phi = \phi$, $T\psi = \psi$, de forma que $T^k\phi = \phi$ y $T^k\psi = \psi$, $k \geq 0$, vemos que

$$\|\phi - \psi\|_\infty = \|T^k\phi - T^k\psi\|_\infty \leq \|\phi - \psi\|_\infty \frac{(L\,(b-a))^k}{k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Así, concluimos que $\|\phi - \psi\|_\infty = 0$ es decir, $\phi = \psi$. □

Obs 8.12 (Regularidad de la solución en términos de la regularidad de la EDO)**.** Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable . Consideremos la EDO de primer orden con condición inicial

$$(P) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(en este contexto, la función f se interpreta como la *ecuación*). Entonces el Teorema 8.11 muestra que existe una única $\phi \in C([a,b])$ tal que $\phi(a) = y_0$, $\phi \in C^1((a,b))$ y $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$, $x \in (a,b)$.

Supongamos además que $f \in C^1((a,b)\times\mathbb{R})$ (continuamente diferenciable en el abierto $(a,b)\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$). En este caso, la función $f(x,\phi(x))$, $x \in [a,b]$ es continua en $[a,b]$ y con derivada continua en (a,b), porque $\phi \in C^1((a,b))$ y porque la composición de funciones de clase C^1 es de clase C^1 (gracias a la regla de la cadena, verificar). Como ϕ satisface la identidad

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{para} \quad x \in (a,b)$$

concluimos que $\phi' \in C^1((a,b))$ que a su vez muestra que $\phi \in C^2((a,b))$.

En general, se verifica por inducción que si $f(x,y) \in C^k((a,b) \times \mathbb{R})$ para $k \geq 0$, entonces la solución ϕ *gana regularidad* en el sentido que $\phi \in C^{k+1}((a,b))$ (verificar). $\triangle$

8.3 Sistemas de EDO de primer orden

Un *sistema de EDO de primer orden* (en forma normal) es un sistema

$$(S) \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{28}$$

(donde la i-ésima ecuación es de la forma $y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leq i \leq n$) tal que $f_i : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$, con $E \subset \mathbb{R}^n$, de forma que f_i es continua, $1 \leq i \leq n$ (en este caso consideramos $[a,b] \times E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ como subespacio métrico).

Una *solución* del sistema (S) es una n-upla de funciones $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, donde $\phi_i : I \to \mathbb{R}$ para $I \subset [a,b]$ abierto en $\mathbb{R}$, $\phi_i \in C^1(I)$, $1 \leq i \leq n$, y tal que: $(\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)) \in E$ y $\phi_i'(x) = f_i(x, \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$, $x \in I$, $1 \leq i \leq n$.

En general, podemos considerar un sistema (S) junto con una familia de condiciones iniciales de la forma $y_i(x_0) = \gamma_i$, $1 \leq i \leq n$, para algún $x_0 \in [a,b]$ y ciertas constantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$. En este caso, una solución de sistema (S) con las condiciones iniciales anteriores es una solución $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ de (S) tal que $x_0 \in I$, y $\phi_i(x_0) = \gamma_i$, $1 \leq i \leq n$. En lo que sigue vamos a permitir que $x_0 = a$, y en este caso vamos a pedir condiciones de continuidad para las funciones ϕ_i en regiones cerradas, y condiciones de diferenciabilidad en el interior de esas regiones cerradas.

Obs 8.13 (Reducción de EDO de orden n a sistemas de EDO de primer orden)**.** Una *ecuación diferencial ordinaria de orden n* (dada en forma normal) es una ecuación de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$$

donde $f:[a,b]\times E\to\mathbb{R}$, con $E\subset\mathbb{R}^n$, es una función continua en $[a,b]\times E\subset\mathbb{R}^{n+1}$ (como subespacio métrico de $\mathbb{R}^{n+1}$).

Una solución de la ecuación es una función $\phi:I\to\mathbb{R}$, con $I\subset[a,b]$ abierto en $\mathbb{R}$, tal que $\phi\in C^n(I)$ y
$$\phi^{(n)}(x)=f(x,\phi(x),\phi^{(1)}(x)\ldots,\phi^{(n-1)}(x))\quad\text{para}\quad x\in I\,.$$
Podemos considerar la EDO de orden n con condiciones iniciales dadas por : $y(x_0)=\gamma_1$, $y^{(1)}(x_0)=\gamma_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=\gamma_n$, para algún $x_0\in[a,b]$ y ciertas constantes $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\mathbb{R}$.

Un hecho interesante es que podemos *reducir* el problema de hallar la solución de una EDO de orden n con condiciones iniciales de la forma

$$(P)\ \begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,\ldots,y^{(n-1)}) \\ y(x_0)=\gamma_1,\ y^{(1)}(x_0)=\gamma_2,\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=\gamma_n\ ,\quad x_0\in[a,b]\end{cases}$$

(para una función $f:[a,b]\times E\to\mathbb{R}$, con $E\subset\mathbb{R}^n$, continua en $[a,b]\times E\subset\mathbb{R}^{n+1}$, y constantes $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\mathbb{R}$) al problema de hallar una solución de un sistema de EDO de primer orden con condiciones iniciales asociado.

En efecto, consideremos el sistema de EDO de primer orden dado por

$$(S)\ \begin{cases} y_1'=y_2\\ y_2'=y_3\\ \vdots\\ y_{n-1}'=y_n\\ y_n'=f(x,y_1,\ldots,y_n)\end{cases}$$

junto con las condiciones iniciales $y_1(x_0)=\gamma_1,\ldots,y_n(x_0)=\gamma_n$. Notemos que si $(\phi_1,\ldots,\phi_n)$ es una solución del sistema de EDO dado por (S) en un abierto $I\subseteq[a,b]$ (con $x_0\in I$) entonces: si $x\in I$,

$$\phi_j'(x)=\phi_{j+1}(x)\quad\text{para}\quad 1\le j\le n-1\implies\phi_1^{(j)}(x)=\phi_{j+1}(x)\quad\text{para}\quad 1\le j\le n-1,$$

es decir, $\phi_1'=\phi_2$, $\phi_1^{(2)}=(\phi_1')'=(\phi_2)'=\phi_3,\ldots,\ \phi_1^{(n-1)}=\phi_n$ y

$$\phi_1^{(n)}(x)=(\underbrace{\phi_1^{(n-1)}}_{=\phi_n})'(x)=\phi_n'(x)=f(x,\phi_1(x),\ldots,\phi_n(x))=f(x,\phi_1(x),\phi_1^{(1)}(x)\ldots,\phi_1^{(n-1)}(x))\,.$$

Por otro lado, las condiciones iniciales del sistema (S) junto con los hechos anteriores muestran que $\phi_1(x_0)=\gamma_1,\ldots,\phi_1^{(n-1)}(x_0)=\gamma_n$. Así, ϕ_1 resulta una solución de la EDO de orden n con condiciones iniciales dada en (P). △

En lo que sigue vamos a desarrollar resultados relacionados con la existencia y unicidad de soluciones de sistemas de EDO de primer orden con condiciones iniciales. Para estos desarrollos resulta conveniente presentar el sistema en forma vectorial.

Obs 8.14 (Sistemas de EDO de primer orden en forma vectorial)**.** Consideremos el sistema de EDO de primer orden como en la Eq. (28), para funciones $f_i:[a,b]\times E\to\mathbb{R}$, con $E\subset\mathbb{R}^n$, de forma que f_i es continua, $1\le i\le n$, y con condiciones iniciales $y_j(x_0)=\gamma_j\in\mathbb{R}$, $1\le j\le n$ (con $x_0\in[a,b]$).

Podemos expresar el sistema mediante una ecuación vectorial: en efecto, definimos $F : [a,b] \times E \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_n(x,y)) \in \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad x \in [a,b]\,,\; y = (y_1, \ldots, y_n) \in E\,.$$

Entonces la función F definida como arriba resulta continua entre los espacios métricos $[a,b] \times E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{R}^n$. En este contexto, vamos a representar al sistema de EDO de primer orden de la Eq. (28) mediante la ecuación vectorial

$$y' = F(x,y) \quad \text{para} \quad (x,y) \in [a,b] \times E$$

donde $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de forma que $y' = (y_1', \ldots, y_n')$. Más aún, si definimos el vector $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces podemos representar las condiciones iniciales mediante la ecuación $y(x_0) = \Gamma$. En adelante, vamos a abreviar

$$\begin{cases} y' = F(x,y) & , (x,y) \in (a,b) \times E \\ y(x_0) = \Gamma\,. \end{cases} \tag{29}$$

que es una EDO vectorial de primer orden con condiciones iniciales. En este caso, una solución será una función vectorial de una variable $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ para $x \in I$, tal que

$$\phi'(x) = F(x, \phi(x)) \quad \text{para} \quad x \in I \quad \text{y} \quad \phi(x_0) = \Gamma\,.$$

Cuando $x_0 = a$ ó $x_0 = b$, consideramos condiciones de continuidad para la función ϕ (ϕ debe ser continua en x_0).

Notemos que el problema planteado en la Eq. (29) es formalmente análogo al problema (P) planteado en el Teorema 8.11. Basados en esta similitud, planteamos una reformulación del problema de la Eq. (29) como hicimos en el caso anterior. $\triangle$

Consideremos una función $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y consideremos el sistema de EDO de primer orden en forma vectorial

$$(P_v) \begin{cases} y' = F(x,y) & , (x,y) \in (a,b) \times E \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ y(a) = \Gamma \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases} \tag{30}$$

Supongamos que existe una función $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^1((a,b), \mathbb{R}^n)$ que es solución de (P_v) es decir, tal que $\phi'(x) = F(x, \phi(x))$, $x \in (a,b)$, y $\phi(a) = \Gamma \in \mathbb{R}^n$. Consideremos las funciones coordenadas $\phi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\phi_i \in C([a,b])$ y $\phi_i \in C^1((a,b))$, $1 \le i \le n$, de forma que $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$, $x \in [a,b]$. Entonces

$$\phi'(x) = F(x, \phi(x)) \;\Leftrightarrow\; (\phi_1'(x), \ldots, \phi_n'(x)) = F(x, \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))\,,\; x \in (a,b)\,,$$

$$\phi(a) = \Gamma \in \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow\; \phi_i(a) = \gamma_i\,,\; 1 \le i \le n\,.$$

Por el teorema fundamental del cálculo (en su versión para funciones de una variable a valores vectoriales) tenemos que

$$\phi(x) = \int_a^x \phi'(t)\; dt + \Gamma = \int_a^x F(t, \phi(t))\; dt + \Gamma \;\in \mathbb{R}^n \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,.$$

Como hicimos antes, a partir de lo anterior consideramos el operador $T : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to C([a,b],\mathbb{R}^n)$ dado por

$$T\psi(x) = \int_a^x F(t,\psi(t))\,dt + \Gamma \ \in \mathbb{R}^n \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\ ,\ \psi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)\,.$$

Notemos que $T\psi$ está bien definida (porque la función $F(t,\psi(t))$ es continua en $[a,b]$) y además, $T\psi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ por resultados previos.

Si ϕ es la solución anterior, entonces $T\phi = \phi$. Recíprocamente, si $\phi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ es tal que $T\phi = \phi$ entonces, hemos probado que $\phi = T\phi \in C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$. Además, por los resultados sobre derivadas de funciones integrales, tenemos que $\phi'(x) = (T\phi)'(x) = F(x,\phi(x))$ y $\phi(a) = T\phi(a) = \Gamma$. Así, ϕ es una solución de (P_v).

Los hechos anteriores muestran que las soluciones $\phi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ del sistema (P_v) de la Eq. (30) corresponden a los puntos fijos $T\phi = \phi$ del operador T. Hay un hecho más que queremos resaltar: si $\varphi = T\psi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ entonces está definida la *derivada lateral*

$$\varphi'_+(a) = \lim_{t\to a^+} \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} = F(a,\psi(a)) \in \mathbb{R}^n\,.$$

La verificación de esta afirmación es un ejercicio.

Obs 8.15. Recordemos las siguientes definiciones y hechos del capítulo 6. Consideramos $[a,b]$ con la métrica usual. En este caso definimos:

1. $C([a,b],\mathbb{R}^n) = \{\ f : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \text{continua}\ \}$. En este caso, existe $r > 0$ tal que
$$f([a,b]) \subseteq B_r(0) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| < r\} \implies 0 \le \|f(x)\| < r \quad \text{para} \quad x \in [a,b]\,.$$
2. Si $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ entonces definimos
$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| :\ x \in [a,b]\,\} \in \mathbb{R}_{\ge 0}\,.$$
$\|f\|_\infty$ está bien definida (ver ítem 1) y es llamada norma supremo (ó norma infinito).

Con la notación anterior, tenemos que:

1. $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y la acción escalar puntual: es decir, si $f,\,g \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f + g : X \to \mathbb{R}^n$ satisface $\alpha f + g \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$.
2. Dada $f,\,g \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:
   (a) $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $f = 0$;
   (b) $\|\alpha\, f\|_\infty = |\alpha|\,\|f\|_\infty$;
   (c) $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Los hechos anteriores muestran que $\|\cdot\|_\infty : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ es una norma en el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $C([a,b],\mathbb{R}^n)$. En particular, podemos considerar la métrica

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup\{\|f(x)-g(x)\| :\ x \in [a,b]\} \quad \text{para} \quad f,\,g \in C([a,b],\mathbb{R}^n)\,.$$

Así, dada una sucesión $(f_k)_{k\ge1}$ en $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ en $(C([a,b],\mathbb{R}^n), d_\infty)$ si y solo si $(f_k)_{k\ge1}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$. En este sentido, d_∞ es llamada la *métrica de la convergencia uniforme.*

Finalmente, recordemos que el espacio métrico $(C([a,b],\mathbb{R}^n), d_\infty)$ es completo; es decir, toda sucesión de Cauchy converge en $(C([a,b],\mathbb{R}^n), d_\infty)$. △

Obs 8.16. Sea $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y sean $\psi_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ sus funciones coordenadas, $1 \le i \le n$. Recordemos que:

1. Hemos probado que si ψ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\|\psi(b) - \psi(a)\| \le \|\psi'(c)\| \, (b - a)$.

2. Hemos definido a ψ como integrable Riemann si cada una de las funciones coordenadas $\psi_i \in \mathcal{R}([a, b])$, $1 \le i \le n$; en este caso, hemos definido

$$\int_a^b \psi(x)\ dx = \left(\int_a^b \psi_1(x)\ dx, \ldots, \int_a^b \psi_n(x)\ dx \right) \in \mathbb{R}^n .$$

   Además, hemos verificado si $\phi(x) = \int_a^x \psi(t)\ dt$ entonces ϕ es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y $\phi'(x) = \psi(x)$, $x \in (a, b)$ (hecho que hemos usado más arriba).

3. Por otro lado, si ψ es integrable Riemann, hemos verificado la desigualdad

$$\left\| \int_a^b \psi(x)\ dx \right\| \le \int_a^b \|\psi(x)\|\ dx .$$

$\triangle$

8.4 Métodos de Picard para sistemas de EDOs de primer orden

Comenzamos extendiendo las técnicas que hemos considerado para la EDO de primer orden en forma normal al contexto de sistemas de EDO de primer orden.

Definición 8.17. *Sea $F : [a, b] \times E \to \mathbb{R}^n$, donde $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que $F(x, y)$ (con $x \in [a, b]$, $y \in E$) es Lipschitz en la segunda variable si existe $L \ge 0$ tal que*

$$\|F(x, z) - F(x, y)\| \le L \, \|y - z\| \quad \textit{para todo} \quad x \in [a, b] \ , \ y, \, z \in E .$$

En este caso decimos que L es una constante Lipschitz de F en la segunda variable. $\triangle$

Lema 8.18. *Sea $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ que es Lipschitz en la segunda variable, con constante de Lipschitz $L \ge 0$. Sea $T : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to C([a, b], \mathbb{R}^n)$ la función dada por*

$$T\phi(x) = \int_a^x F(t, \phi(t))\ dt + \Gamma \in \mathbb{R}^n \quad \textit{para} \quad x \in [a, b]$$

donde $\Gamma \in \mathbb{R}^n$. Si ϕ, $\psi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ satisfacen $\|\psi(x) - \phi(x)\| \le M \frac{(x-a)^k}{k!}$, $x \in [a, b]$, para ciertas constantes $M \ge 0$ y $k \ge 0$ entonces

$$\|T\psi(x) - T\phi(x)\| \le L \, M \frac{(x - a)^{k+1}}{(k + 1)!} \quad \textit{para} \quad x \in [a, b] .$$

En particular, T es uniformemente continua en el EM $(C([a, b], \mathbb{R}^n), d_\infty)$.

Demostración. Argumentamos de forma similar a la prueba del Lema 8.10. Sean T, ψ y ϕ como en el enunciado. Entonces

$$\begin{aligned}
\|(T\psi)(x)-(T\phi)(x)\| &= \left\|\int_a^x F(t,\psi(t))\;dt - \int_a^x F(t,\phi(t))\;dt\right\| \\
&= \left\|\int_a^x F(t,\psi(t)) - F(t,\phi(t))\;dt\right\| \\
&\leq \int_a^x \|F(t,\psi(t)) - F(t,\phi(t))\|\;dt \leq \int_a^x L\;\|\psi(t)-\phi(t)\|\;dt \\
&\leq L\int_a^x M\,\frac{(t-a)^k}{k!}\;dt = L\,M\,\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}\,\Big|_{t=a}^{t=x} = L\,M\,\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Finalmente, sean ψ, $\phi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$; tomando $k=0$ y $M = d_\infty(\psi,\phi)$ entonces se verifica que (notemos que $(x-a)^0 = 1$, $0! = 1$)

$$\|\psi(x)-\phi(x)\| \leq M\,\frac{(x-a)^0}{0!} \implies \|T\psi(x) - T\phi(x)\| \leq L\,M\,\frac{(x-b)^1}{1} \leq L\,M\,(b-a)\,.$$

Si recordamos que elegimos $M = d_\infty(\psi,\phi)$ entonces tomando supremos sobre $x\in[a,b]$ en la segunda desigualdad de arriba concluimos que

$$d_\infty(T\psi,T\phi) \leq L\,M\,(b-a) = L\,d_\infty(\psi,\phi)\,(b-a)$$

que muestra que T es uniformemente continua (dado $\varepsilon>0$ entonces tomando $\delta = \varepsilon\,(L\,(b-a))^{-1}$ se tiene que si $d_\infty(\psi,\phi)<\delta$ entonces $d_\infty(T\psi,T\phi)<\varepsilon$). □

Teorema 8.19 (global de Picard para sistemas de EDOs de primer orden)**.** *Sea $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable. Dado el sistema de EDO de primer orden con condiciones iniciales (en forma vectorial)*

$$(P_v)\ \left\{\begin{array}{ll} y' = F(x,y) & ,\ (x,y)\in(a,b)\times E \\ y(a) = \Gamma\in\mathbb{R}^n & \end{array}\right.$$

entonces existe una única $\phi\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(a)=\Gamma$, $\phi\in C^1((a,b))$ y $\phi'(x) = F(x,\phi(x))$, $x\in(a,b)$.

Demostración. Como hemos observado antes, dada una función $\phi\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ entonces: $\phi(a)=\Gamma\in\mathbb{R}^n$, $\phi\in C^1((a,b))$ y $\phi'(x) = F(x,\phi(x))$, $x\in(a,b)$, si y solo si $T\phi=\phi$.

Así, para probar la existencia de una solución ϕ del problema (P_v) (en el sentido anterior) vamos a mostrar que T tiene un punto fijo.

Comenzamos definiendo la función constante $\phi_0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ dada por $\phi_0(x)=\Gamma$, $x\in[a,b]$. A partir de ϕ_0 definimos una sucesión de funciones $(\phi_k)_{k\geq 0}$ dadas por

$$\phi_{k+1}(x) = T\phi_k(x) = \int_a^x F(t,\phi_k(t))\;dt + \Gamma\in\mathbb{R}^n \quad \text{para} \quad x\in[a,b]\ ,\ k\geq 0\,.$$

Por construcción, cada $\phi_k\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, $k\geq 0$. Sea L la constante de Lipschitz de F y sea $M = \sup\{\|F(t,\Gamma)\| \ :\ t\in[a,b]\}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ (notemos que la función $h(t) = \|F(t,\Gamma)\|$ es continua en el compacto $[a, b]$ de forma que el supremo anterior es en realidad un máximo y en particular, está en $\mathbb{R}_{\geq 0}$). Notemos que entonces, si $x \in [a, b]$:

$$\|\phi_1(x) - \phi_0(x)\| \;=\; \left\|\int_a^x F(t, \Gamma)\ dt\right\| \leq \int_a^x \|F(t, \Gamma)\|\ dt \leq M\,\frac{(x-a)^1}{1!}\,.$$

Por el lema anterior, vemos que

$$\|\phi_2(x) - \phi_1(x)\| = \|T\phi_1(x) - T\phi_0(x)\| \leq L\,M\,\frac{(x-a)^2}{2!} \quad \text{para} \quad x \in [a, b]\,.$$

$$\|\phi_3(x) - \phi_2(x)\| = \|T\phi_2(x) - T\phi_1(x)\| \leq L^2\,M\,\frac{(x-a)^3}{3!} \quad \text{para} \quad x \in [a, b]\,.$$

En general, argumentando por inducción en $k \geq 1$ concluimos que

$$\|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\| = \|T\phi_k(x) - T\phi_{k-1}(x)\| \leq \underbrace{L\,L^{k-1}}_{=L^k}\ M\,\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{para} \quad x \in [a, b]\,.$$

Podemos utilizar las estimaciones anteriores para concluir que si $1 \leq n \leq m$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\phi_m(x) - \phi_n(x)\| &= \|\sum_{k=n}^{m-1} \phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k\,M\,\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L}\sum_{k=n+1}^{m} \frac{(L\ (x-a))^k}{k!} \\
&\leq \frac{M}{L}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(L\ (b-a))^k}{k!} \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b]\,.
\end{aligned}$$

Como la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L(b-a))^k}{k!} = e^{L(b-a)}$ converge entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(L\,(b-a))^k}{k!} < \varepsilon\,.$$

Teniendo en cuenta las dos últimos estimaciones, vemos que dada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces

$$\|\phi_m - \phi_n\|_\infty \leq \varepsilon\,.$$

Lo anterior indica que la sucesión $(\phi_k)_{k\geq 0}$ es de Cauchy en el espacio métrico $(C([a, b], \mathbb{R}^n), d_\infty)$. Como este es un espacio métrico completo, concluimos que existe $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \phi_k = \phi$ (con respecto a la métrica d_∞, es decir, con respecto a la convergencia uniforme). Como la función T es continua en $(C([a, b], \mathbb{R}^n), d_\infty)$ vemos que

$$T\phi = T(\lim_{k\to\infty} \phi_k) = \lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = \lim_{k\to\infty} \phi_{k+1} = \phi$$

donde hemos usado la definición de ϕ_{k+1}, $k \geq 0$. Lo anterior muestra que $T\phi = \phi$, es decir, ϕ es un punto fijo de T; así, ϕ es solución del problema (P_v), en el sentido que hemos mencionado previamente.

Veamos la unicidad: Si $\psi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ es otra solución de (P_v) entonces $T\psi = \psi$. En este caso, si $x \in [a,b]$ entonces (considerando las composiciones $T^{k+1} = T^k \circ T$, $k \geq 1$)

$$\|\phi(x) - \psi(x)\| \leq \|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^0}{0!} \implies \|T\phi(x) - T\psi(x)\| \leq L\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^1}{1!}$$

$$\implies \|T^2\phi(x) - T^2\psi(x)\| \leq L^2\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^2}{2!}$$

y en general vale que si $x \in [a,b]$,

$$\|T^k\phi(x) - T^k\psi(x)\| \leq L^k\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(x-a)^k}{k!} \leq L^k\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(b-a)^k}{k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

(verificar por inducción: ejercicio!). Usando la estimación anterior y notando que $T\phi = \phi$, $T\psi = \psi$, de forma que $T^k\phi = \phi$ y $T^k\psi = \psi$, $k \geq 0$, vemos que

$$\|\phi - \psi\|_\infty = \|T^k\phi - T^k\psi\|_\infty \leq L^k\,\|\phi - \psi\|_\infty \frac{(b-a)^k}{k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Así, concluimos que $\|\phi - \psi\|_\infty = 0$ es decir, $\phi = \psi$. □

Ejemplo 8.20. Consideremos la EDO de segundo orden con condiciones iniciales

$$(P)\ \begin{cases} y'' + y + (y^2 + (y')^2)^{1/2} = 0 & \quad (\ y'' = -y - (y^2 + (y')^2)^{1/2}\ ) \\ \\ y(0) = \gamma_1\,,\ y'(0) = \gamma_2\,. \end{cases}$$

Para modelar este problema usamos el argumento de la Observación 8.13: en este caso, consideramos el sistema de EDOs con condiciones iniciales

$$(S)\ \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 - (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \\ y_1(0) = \gamma_1\,,\ y_2(0) = \gamma_2\,. \end{cases}$$

Finalmente, expresamos el sistema anterior de forma vectorial: para esto, definimos $F(x,y_1,y_2) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y_1,y_2) = (y_2, -y_1 - (y_1^2+y_2^2)^{1/2})$. Entonces el sistema (S) equivale al problema vectorial

$$(P_v)\ \begin{cases} y' = F(x,y) & \quad (x,y) \in [0,b]\times\mathbb{R}^2 \\ \\ y(0) = (\gamma_1,\gamma_2) \in \mathbb{R}^2\,. \end{cases}$$

para $b > 0$. Notemos que la función F es continua en $[0,b]\times\mathbb{R}^2$. Además, vale que: si $x \in [0,b]$, $y = (y_1,y_2)$, $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$\begin{aligned} \|F(x,y) - F(x,z)\| &= \|\,(y_2 - z_2, z_1 - y_1 + \|z\| - \|y\|\,)\,\| \\ &\leq \|(y_2 - z_2, z_1 - y_1)\| + \|(0, \|z\| - \|y\|)\| = \|y - z\| + |\,\|y\| - \|z\|\,| \\ &\leq \|y - z\| + \|y - z\| = 2\,\|y - z\| \end{aligned}$$

que muestra que F es Lipschitz, con constante de Lipschitz $L = 2$. Por el Teorema Global de Picard 8.19, existe una única función $\phi : [0,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\phi \in C([0,b],\mathbb{R}^2)$, $\phi \in C^1((0,b),\mathbb{R}^2)$ tal que $\phi(0) = (\gamma_1,\gamma_2)$ y tal que $\phi'(x) = F(x,\phi(x))$, para $x \in (0,b)$.

Si $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ son las funciones coordenadas de ϕ entonces, según hemos verificado en la Observación 8.13, la función $\phi_1 \in C^2((0,b))$ es tal que

$$\phi_1''(x) = -\phi_1(x) - (\phi_1(x)^2 + (\phi_1'(x))^2)^{1/2} \quad \text{para} \quad x \in (0,b)$$

y $\phi_1(0) = \gamma_1$, $\phi_1'(0) = \gamma_2$. De esta forma, hemos garantizado la existencia de solución del problema (P). De forma similar, podemos concluir la unicidad de la solución hallada (en el sentido anterior) a partir de la unicidad de ϕ. △

Obs 8.21. La hipótesis de que una función $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sea una función Lipschitz en la segunda variable en toda la región $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ puede ser muy restrictiva; esto es una limitación al momento de aplicar el Teorema de Picard Global. Por ejemplo, consideremos el problema (con $n = 1$)

$$(P_v) \begin{cases} y' = y^2 & (x,y) \in (0,2) \times \mathbb{R} \\ \\ y(0) = 1 \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

En este caso, $F(x,y) = y^2$ está definida en $[0,2] \times \mathbb{R}$ y es continua (incluso $F \in C^\infty((0,2) \times \mathbb{R}))$. Pero F no es (globalmente) Lipschitz en la segunda variable en $[0,2] \times \mathbb{R}$ (ejercicio). Sin embargo, si achicamos la región correspondiente a la segunda variable, de forma conveniente para que la ecuación anterior tenga sentido, entonces podemos obtener la condición Lipschitz: por ejemplo, podemos considerar la restricción $F : [0,2] \times \overline{B}_r(1) \to \mathbb{R}$, donde $\overline{B}_r(1)$ denota la bola cerrada centrada en 1 (que es el valor requerido para la solución $y(0) = 1$) y de radio $r > 0$ (en nuestro caso, $\overline{B}_r(1) = [1-r, 1+r] \subset \mathbb{R}$). Entonces la restricción $F : [0,2] \times \overline{B}_r(1) \to \mathbb{R}$ resulta Lipschitz. De hecho, si $y, z \in [1-r, 1+r] = \overline{B}_r(1)$ entonces

$$|F(x,y) - F(x,z)| \leq L\,\|(x,y) - (x,z)\| = L\,|y - z|$$

para cualquier constante $L \geq 0$ que satisfaga $\|\nabla F(p,q)\| \leq L$, para todo $(p,q) \in [0,2] \times \overline{B}_r(1)$. Notemos que tal constante L siempre existe (para todo $r > 0$ fijo): por ejemplo, basta notar que se puede extender $\nabla F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\nabla F(p,q) = (0, 2q)$, que es una función continua; en particular la función continua $\|\nabla F\|$ debe alcanzar su valor máximo en el compacto $[0,2] \times \overline{B}_r(1) \subset \mathbb{R}^2$ (completar los detalles de este argumento). △

En lo que sigue vamos a desarrollar una versión local del Teorema de Picard, que requiere una condición Lipschitz *local*.

Teorema 8.22 (Teorema de Picard: versión local)**.** *Sea $\Gamma \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ y $F : [a,b] \times \overline{B}_R(\Gamma) \to \mathbb{R}^n$ una función continua, no nula y que es Lipschitz en la segunda variable. Dada la EDO vectorial de primer orden*

$$(P_v) \begin{cases} y' = F(x,y) & (x,y) \in (a,b) \times \overline{B}_R(\Gamma) \\ \\ y(a) = \Gamma \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

definamos $h = \min\{(b-a)\,,\, \frac{R}{\|F\|_\infty}\} > 0$ entonces existe una única $\phi : [a, a+h] \to \overline{B}_R(\Gamma)$ tal que ϕ es continua en $[a, a+h]$, $\phi \in C^1((a, a+h))$, $\phi(a) = \Gamma$ y $\phi'(x) = F(x, \phi(x))$, $x \in (a, a+h)$.

Demostración. Vamos a considerar un argumento similar al de la demostración del Teorema Global vectorial de Picard. Definimos

$$T\psi(x) = \int_a^x F(t, \psi(t))\, dt + \Gamma \in \mathbb{R}^n \quad \text{para} \quad x \in [a, a+h]$$

para $\psi \in C([a, a+h], \overline{B}_R(\Gamma))$, donde consideramos $\overline{B}_R(\Gamma) = \{w \in \mathbb{R}^n : \ \|w - \Gamma\| \leq R\}$ con la métrica euclídea. En este caso, definimos $\phi_0 \in C([a, a+h], \overline{B}_R(\Gamma))$ dada por $\phi_0(x) = \Gamma$, $x \in [a, a+h]$.

Asumiendo que hemos podido definir $\phi_k \in C([a, a+h], \overline{B}_R(\Gamma))$ para $k \geq 0$ entonces definimos $\phi_{k+1} = T\phi_k$; veamos que en este caso $\phi_{k+1} \in C([a, a+h], \overline{B}_R(\Gamma))$: el tema aquí es verificar que $\phi_{k+1}([a, a+h]) \subset \overline{B}_R(\Gamma)$ (la imágen de ϕ_{k+1} no se escapa del compacto $\overline{B}_R(\Gamma)$). En efecto: si $x \in [a, a+h]$,

$$\|\phi_{k+1}(x) - \Gamma\| = \left\| \int_a^x F(t, \phi_k(t))\, dt \right\| \leq \int_a^x \|F(t, \phi_k(t))\|\, dt \leq \|F\|_\infty (x - a) \leq \|F\|_\infty h \leq R$$

donde $\|F\|_\infty = \sup\{\|F(x, y)\| \ : \ (x, y) \in [a, b] \times \overline{B}_R(\Gamma)\}$ y la última desigualdad vale porque $h \leq \frac{R}{\|F\|_\infty}$.

De esta forma, podemos definir inductivamente $\phi_{k+1} = T\phi_k \in C([a, a+h], \overline{B}_R(\Gamma))$ para todo $k \geq 0$. Como en la prueba del Teorema Global de Picard, la sucesión $(\phi_k)_{k\geq 0}$ converge uniformemente en $[a, a+h]$ a una función $\phi \in C([a, a+h], \overline{B}_R(\Gamma))$ que satisface: $\phi(x) = T\phi(x)$, $x \in [a, a+h]$. Como antes, concluimos que ϕ es la única solución del sistema (P_v) en $[a, a+h]$ (en el sentido del enunciado). □

Obs 8.23 (Regularidad adicional de las soluciones de sistemas de EDO's de primer orden)**.** Con la notación del Teorema 8.22, supongamos además que F se puede extender al dominio $[a, b] \times B_{R'}(\Gamma)$ para algún $R' > R$ y que $F \in C^1((a, b) \times B_{R'}(\Gamma))$. Esta regularidad adicional en la ecuación del sistema (P_v) garantiza una regularidad adicional de su solución ϕ en $(a, a+h)$. En efecto, notemos que como $\phi \in C^1(a, a+h)$ entonces la composición $F(x, \phi(x))$ es una función de clase $C^1((a, a+h))$ (verificar usando la regla de la cadena junto con las hipótesis que estamos asumiendo; tener en cuenta que (ver la prueba del Teorema 8.22 $\phi(x) \in \overline{B}_R(\Gamma) \subset B_{R'}(\Gamma)$ para poder aplicar la regla de la cadena junto con las hipótesis). Entonces, la identidad

$$\phi'(x) = F(x, \phi(x)) \quad \text{para} \quad x \in (a, a+h)$$

muestra que $\phi' \in C^1((a, a+h))$ de forma que $\phi \in C^2((a, a+h))$.

Argumentando por inducción en $k \geq 0$ se verifica que: si $F \in C^k((a, b) \times B_{R'}(\Gamma))$ para algún $R' > R$ entonces $\phi \in C^{k+1}((a, a+h))$. △

Obs 8.24. Volviendo a la Observación 8.21, si $R > 0$ entonces $F : [0, 2] \times \overline{B}_R(1) \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = y^2$, es una función Lipschitz en la segunda variable (por la acotación $|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)| = 2|y| \leq 2(R+1)$ en el compacto $[0, 2] \times \overline{B}_R(1) = [0, 2] \times [1 - R, 1 + R] \subset \mathbb{R}$.

Por el teorema de Picard local, existe una solución ϕ en el intervalo cerrado $[0, h]$ donde $h = \min\{2, \frac{R}{\|F\|_\infty}\}$; como $\|F\|_\infty = (R+1)^2$ (en $[0, 2] \times \overline{B}_R(1) = [0, 2] \times [1 - R, 1 + R]$) y la expresión $\frac{R}{(R+1)^2}$ toma el valor máximo $1/4$ (en $R = 1$) vemos que (tomando $R = 1$) existe

$$\phi : [0, 1/4] \to [0, 2]$$

continua en $[0,1/4]$, $\phi \in C^1((0,1/4))$, $\phi(0)=1$ y $\phi'(x)=\phi(x)^2$ en $(0,1/4)$.

Pero ya hemos resuelto esta ecuación por el método de separación de variables: en este caso, hallamos $y(x)=-(x-1)^{-1}=(1-x)^{-1}$ para $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. De esta forma, vemos que la solución hallada por el método local de Picard puede ser extendida a intervalos $[0,1/4]\subset[0,1-\varepsilon]$ para todo $0<\varepsilon<3/4$.

De hecho, para obtener soluciones de la ecuación en dominios más grandes que los predichos por el teorema local de Picard, podemos notar que si partimos de la solución $\phi:[0,1/4]\to\mathbb{R}$ hallada por el método local de Picard, entonces podemos plantear la misma ecuación, pero ahora considerando la restricción del valor de la solución ϕ en el punto $1/4$ (en donde se termina la solución ϕ hallada en este primer paso): es decir, podemos considerar ahora el sistema

$$(P_v')\ \begin{cases} y'=y^2 \\ \\ y(1/4)=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}\in\mathbb{R} \end{cases}$$

(donde hemos usado que $\phi(x)=(1-x)^{-1}$ en $[0,1/4]$, por la unicidad de solución y por el cálculo hecho con el método de separación de variables).

Ahora podemos volver a aplicar el teorema local de Picard al nuevo sistema (P_v'): en este caso, este resultado indica que hay solución única de (P_v') en el intervalo $[1/4,1/4+h]$, para

$$h=\min\{2-1/4,\frac{R}{\|\tilde{F}\|_\infty}\}$$

donde $R>0$ y $\tilde{F}=F|_{\overline{B}_R(\frac{4}{3})}$. Argumentando como al comienzo de esta observación, (maximizando la expresión correspondiente) concluimos que el valor óptimo corresponde a $h=\frac{3}{16}$: en este caso, hay una solución única $\phi_1:[1/4,1/4+3/16]\to\mathbb{R}$ del sistema (P_v'). Más aún, en este caso podemos *pegar* las soluciones obtenidas hasta ahora, en una función

$$\psi:[0,1/4+3+16]\to\mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \psi(x)=\begin{cases}\phi(x) & x\in[0,1/4]\\ \\ \phi_1(x) & x\in[1/4,1/4+3/16]\end{cases}$$

Notemos que las expresiones de los casos anteriores se pegan de forma continua, porque por construcción $\phi_1(1/4)=\phi(1/4)$. Más aún, la derivada $\psi'(1/4)$ existe y coincide con las derivadas laterales de ϕ y ϕ_1 en ese punto. Finalmente, notemos que ψ es solución del sistema original (P_v) en $[0,1/4+3/16]$.

Podríamos seguir este tipo de argumento y extender el dominio de ψ y hallar una solución de la EDO (P_v) en una región más grande que $[0,1/4+3/16]$. △

En lo que sigue vamos a necesitar el siguiente concepto.

Definición 8.25. Sea $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Decimos que F es *localmente* Lipschitz en la segunda variable si para todo $R>0$ la restricción $F:[a,b]\times\overline{B}_R(0)\to\mathbb{R}^n$ es Lipschitz en la segunda variable (con constante de Lipschitz $L_R\geq 0$, que depende de $R>0$). △

Vamos a considerar el tipo de argumento considerado en la Observación 8.24 en el siguiente resultado

Teorema 8.26 (Teorema de continuación)**.** *Sea $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Consideremos la EDO vectorial de primer orden*

$$(P)\ \begin{cases} y'=F(x,y) & (x,y)\in(a,b)\times\mathbb{R}^n \\ \\ y(a)=\Gamma\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Entonces se tiene alguna de las siguientes situaciones:

1. *Existe una solución única $\phi \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ de (P), de forma que $\phi \in C^1((a,b))$, $\phi(a) = \gamma$ y $\phi'(x) = F(x,\phi(x))$, $x \in (a,b)$.*

2. *Existe $c \in (a,b]$ tal que existe una solución única $\phi \in C([a,c),\mathbb{R}^n)$ de (P) de forma que $\phi \in C^1((a,c))$, $\phi(a) = \gamma$ y $\phi'(x) = F(x,\phi(x))$, $x \in (a,c)$ y*

$$\lim_{x\to c^-} \|\phi(x)\| = +\infty\,.$$

Demostración. El hecho de que F sea localmente de Lipschitz en la segunda variable garantiza que la restricción $F : [a,b] \times \overline{B}_R(\Gamma) \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz en la segunda variable para $R > 0$ (para alguna constante $L \geq 0$ que dependerá de R y Γ). Así, el teorema local de Picard muestra que existe $h > 0$ tal que existe una única solución $\phi : [a, a+h] \to \mathbb{R}^n$ de (P) en el sentido que: $\phi \in C([a,a+h],\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^1((a,a+h))$, $\phi(a) = \Gamma$, $\phi'(x) = F(x,\phi(x))$, $x \in (a,a+h)$. Consideramos entonces el conjunto

$$\mathcal{A} = \{a < d \leq b : \text{ el problema } (P) \text{ tiene solución única en } [a,d] \text{ (en el sentido anterior) }\}\,.$$

Los comentarios anteriores muestran que $a < d = a+h \in \mathcal{A}$ de forma que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, y $\mathcal{A}$ está acotado superiormente por b. Consideremos $a < c := \sup \mathcal{A} \leq b$.

Sean d_1, $d_2 \in \mathcal{A}$, tales que $a < d_1 < d_2$ y sean $\psi_i : [a,d_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$, las únicas soluciones de (P) en las regiones correspondientes. Entonces $\psi_2|_{[a,d_1]} : [a,d_1] \to \mathbb{R}^n$ es solución de (P) en la región $[a,d_1]$; como ψ_1 también es solución de (P) en la región $[a,d_1]$ entonces, por la unicidad de solución en la definición de $\mathcal{A}$, concluimos que $\psi_1 = \psi_2|_{[a,d_1]}$. Así, podemos definir $\phi : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ como sigue: consideremos una sucesión creciente $(x_m)_{m\geq 1}$ en $\mathcal{A}$ de forma que $\lim_{m\to\infty} x_m = c$; para cada $m \geq 1$, sea $\psi_m : [a,x_m] \to \mathbb{R}^n$ la única solución de (P) en $[a,x_m]$. Entonces dado $x \in [a,c)$ existe $m \geq 1$ tal que $a \leq x < x_m$ y en ese caso definimos $\phi(x) := \psi_m(x)$. Los comentarios anteriores muestran que ϕ es una función bien definida (por ejemplo, no depende de $x_m \in \mathcal{A}$, verificar!). Es sencillo verificar que $\phi \in C([a,c),\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^1((a,c))$, $\phi(a) = \Gamma$ y $\phi'(x) = F(x,\phi(x))$, $x \in (a,c)$; en particular, ϕ es solución de (P) en $[a,c)$. Además, ϕ es la *única* solución de (P) en $[a,c)$. Para verificar las afirmaciones anteriores, notemos que *localmente* alrededor de cada $x \in (a,c)$, ϕ es como ψ_m, para un $m \geq 1$ suficientemente grande: es decir, dado $x \in [a,c)$ existen $m \geq 1$ y $r > 0$ (que dependen de x) tal que $\phi|_{B_r(x)} = \psi_m|_{B_r(x)}$ (este último hecho permite verificar las afirmaciones anteriores, desarrollar con detalle).

Si suponemos que $\lim_{x\to c^-} \|\phi(x)\| = +\infty$, entonces se verifica el ítem 2.

Así, supongamos que no se verifica el ítem 2. En este caso, debe existir una sucesión creciente $(z_m)_{m\geq 1}$ en $[a,c)$ tal que $\lim_{m\to\infty} z_m = c$ y $\|\phi(z_m)\| \leq K$, $m \geq 1$, para alguna constante $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. En lo que sigue consideramos los siguientes dos casos:

1er caso: supongamos que $c < b$. Sea $D = [a,b] \times \overline{B}_{K+1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que es compacto. Así, existe $M = \sup\{\|F(x,y)\| : \ (x,y) \in D\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que $M > 0$, porqué?) y sea $\delta = \min\{(b-c)/2\,,\, \frac{1}{2M}\} > 0$. Sea $m \geq 1$ tal que $0 < c - z_m < \delta$; en este caso podemos aplicar el teorema local de Picard al problema

$$(P') \begin{cases} y' = F(x,y) & (x,y) \in [z_m,b] \times \mathbb{R}^n \\ \\ y(z_m) = \phi(z_m) \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Aplicando el teorema local de Picard en este caso, concluimos que existe una solución ψ del problema (P') definida en el intervalo $[z_m, z_m + h]$, donde

$$h = \min\{b - z_m\,, \frac{K+1}{M}\} \geq \min\{b - z_m\,, \frac{1}{M}\} \geq 2\,\delta$$

(verificar estas desigualdades con detalle, ejercicio!). Notemos que en este caso,

$$b \geq z_m + h := c' \geq z_m + \delta > c \quad \text{ y } \quad \psi|_{[z_m,c)} = \phi|_{[z_m,c)}$$

donde la última igualdad es por unicidad del teorema local de Picard. Esta última observación permite definir la función $\psi^* : [a, c'] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in [a, c); \\ \\ \psi(x) & x \in [z_m, c'] \,. \end{cases}$$

Los comentarios previos muestran que ψ^* está bien definida (notar que los casos de la definición de ψ^* no son disjuntos) y tal que $\psi^* \in C([a, c'], \mathbb{R}^n)$, $\psi^* \in C^1((a, c'))$, $\psi^*(a) = \Gamma$ y $(\psi^*)'(x) = F(x, \psi^*(x))$, $x \in (a, c')$. Estos hechos muestran que $c' \in \mathcal{A}$, que junto con el hecho de que $c' > c = \sup \mathcal{A}$ son un absurdo. Así, este caso no se puede dar!

Segundo caso: $c = b$. En este caso argumentamos como en el primer caso (tomando $\delta = \frac{1}{2M}$, con M definido como antes) para probar que ϕ se extiende a una solución ψ^* que está definida en $[a, c'] = [a, b]$; es decir, una inspección detallada del argumento del primer caso muestra que bajo nuestras hipótesis ($c = b$) podemos concluir que si c' está definido como antes, entonces $c' = b$. De esta forma, se verifica el ítem 1. del enunciado (verificar este argumento con detalle). □

Obs 8.27. Consideremos la EDO de orden n con condiciones iniciales de la forma

$$(P) \ \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(a) = \gamma_1,\ y^{(1)}(a) = \gamma_2, \dots,\ y^{(n-1)}(a) = \gamma_n \,. \end{cases}$$

para una función $f : [a, b] \times E \to \mathbb{R}$, con $E \subset \mathbb{R}^n$, es una función continua en $[a, b] \times E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y constantes $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

En la Observación 8.13 hemos visto que el problema (P) se puede resolver en términos del sistema de EDO's de primer orden (en forma vectorial)

$$(P_v) \ \begin{cases} y' = F(x, y) & , (x, y) \in (a, b) \times E \\ y(a) = \Gamma \,. \end{cases}$$

donde $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ y

$$F(x, y) = F(x, y_1, \dots, y_n) = (y_2, y_3, \dots, y_n, f(x, y_1, \dots, y_n)) \quad \text{para} \quad (x, y) \in [a, b] \times E \,.$$

Si suponemos que $f(x, y)$ es Lipschitz (respectivamente localmente Lipschitz) en la segunda variable, entonces la expresión anterior permite verificar que $F(x, y)$ es Lipschitz (respectivamente localmente Lipschitz) en la segunda variable también (con otra constante, ejercicio). Esta observación permite deducir los análogos de los Teoremas de Picard 8.19, 8.22 y del Teorema de continuación 8.26 para la EDO de orden n con condiciones iniciales dada en (P).

Con la notación anterior, si suponemos que $E \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces dado $k \geq 0$

$$f \in C^k((a,b) \times E) \quad \text{si y solo si} \quad F \in C^k((a,b) \times E)\,.$$

En particular, la regularidad adicional de la ecuación (determinada por f) en (P) garantiza una regularidad adicional de la solución de (P): explícitamente, si $f \in C^k((a,b)\times E)$ entonces si ϕ_1 denota la solución de (P) en alguna región $[a, a+h]$ vale que $\phi_1 \in C^{k+1}(a, a+h)$ (recordar que si $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ es solución de (P_v) entonces ϕ_1 es solución de (P) y la regularidad adicional de ϕ está indicada en la Observación 8.23). △

Para finalizar el capítulo, hacemos una serie de observaciones relacionadas con el sistema de EDO's de primer orden con condiciones inciales

$$\begin{cases} y' = F(x,y) & , (x,y) \in (a,b) \times E \\ y(c) = \Gamma \end{cases}$$

en los casos en que la condición inicial está dada en algún punto interior $c \in (a,b)$. En este caso tenemos ecuación *antes* y *después* de $c \in (a,b)$; y en este contexto queremos tener una solución ϕ definida en un intervalo abierto alrededor de c. Bajo hipótesis adecuadas, los métodos considerados hasta aquí nos proporcionan una solución en una región de la forma $[c, c+h]$ para cierto $h > 0$. Pero como ya dijimos, queremos tener una solución en toda una región $[c-h, c+h]$ con $h > 0$.

Realizando un cambio de coordenadas lineal (que esencialmente no modifica ninguna de las hipótesis a considerar) podemos a asumir que $c = 0 \in (a,b)$, para simplificar un poco la notación (así $a < 0 < b$). Supongamos además que $E = \mathbb{R}^n$, que $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y que $F : [a,b] \times \overline{B}_R(\Gamma) \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz en la segunda variable, para algún $R > 0$. De esta forma, tenemos el sistema

$$(P_v) \begin{cases} y' = F(x,y) & (x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}^n \\ y(0) = \Gamma\,. \end{cases}$$

Sea $h = \min\{b\,, \frac{R}{\|F\|_\infty}\} > 0$, donde $\|F\| = \sup\{\|F(x,y)\| \ : \ (x,y) \in [a,b] \times \overline{B}_R(\Gamma)\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces el Teorema local de Picard (pero ojo: aplicado al problema restringido en la región $[0,b]$) muestra que existe una única $\phi : [0, 0+h] \to \mathbb{R}^n$ tal que ϕ es continua en $[0,h]$, $\phi \in C^1((0,h))$, $\phi(0) = \Gamma$ y $\phi'(x) = F(x, \phi(x))$, $x \in (0,h)$. Más aún, en este caso el teorema del valor medio muestra que existe la derivada lateral por derecha

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = F(0, \phi(0)) = F(0, \Gamma)\,.$$

Consideremos el sistema de EDO's *reflejado* alrededor de $c = 0$, dado por

$$(P_v') \begin{cases} y' = H(x,y) & , \quad (x,y) \in (0,-a) \times \mathbb{R}^n \\ y(0) = \Gamma \end{cases}$$

donde consideramos la función $H : [0,-a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$H(x,y) = -F(-x,y) \quad \text{para} \quad (x,y) \in [0,-a] \times \mathbb{R}^n$$

(recordemos que $a < 0$ de forma que $0 < -a$). En este caso, la función H es continua y Lipschitz en la segunda variable en $[0,-a] \times \overline{B}_R(\Gamma)$ (porque F lo es, verificar). El teorema de

Picard local muestra que existe un $h' > 0$ y una función $\psi \in C([0,h'])$ tal que $\psi \in C^1((0,h'))$ y

$$\psi'(x) = H(x,\psi(x)) = -F(-x,\psi(x)) \quad \text{para} \quad x \in (0,h')\,.$$

Entonces definimos la función $\eta : [-h',0] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\eta(x) = \psi(-x)$, $x \in [-h',0]$. Entonces $\eta \in C([-h',0])$, $h \in C^1((-h',0))$, $\eta(0) = \psi(0) = \Gamma$ y

$$\eta'(x) = -\psi'(-x) = -(-F(-(-x),\psi(-x))) = F(x,\psi(-x)) = F(x,\eta(x)) \quad \text{para} \quad x \in (-h',0)\,.$$

Más aún, por el teorema del valor medio, concluimos que existe la derivada lateral

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\eta(t)-\eta(0)}{t} = F(0,\eta(0)) = F(0,\Gamma)\,.$$

Finalmente, definimos la función $\rho : [-h',h] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si} \;\; x \in [-h',0] \\ \\ \phi(x) & \text{si} \;\; x \in [0,h]\,. \end{cases}$$

Notemos que las propiedades anteriores de η y ϕ muestran que ρ está bien definida, $\rho \in C([-h',h])$, $\rho(0) = \Gamma$, existe $\rho'(0) = F(0,\Gamma)$ y se verifica la ecuación $\rho'(x) = F(x,\rho(x))$, $x \in (-h',h)$; en particular, $\rho \in C^1((-h',h))$. Por último notemos que tal solución del sistema de EDO de primer orden es única: la unicidad es consecuencia de la unicidad de ϕ y ψ (los detalles quedan a cargo del lector).

Notemos que los hechos anteriores de sistemas de EDO's de primer orden con condiciones iniciales tienen consecuencias para la EDO de orden n, con condiciones iniciales. Dejamos a cargo del lector la redacción detallada del enunciado correspondiente (que debe incluir el problema a resolver, las hipótesis sobre la ecuación y las conclusiones: existencia y unicidad de la solución en un intervalo abierto que contiene el punto del dominio en donde determinamos las condiciones iniciales).

Hay varios problemas más que se pueden considerar en este contexto, relacionados con la estabilidad de la solución con respecto a la ecuación y la condición inicial. En esta primera versión de las notas vamos a dejar estas cuestiones fuera, y vamos a concluir el apunte aquí.

8.5 Ejercicios

Ejercicio 154. Si C es un número real dado demostrar que existe una, y sólo una función f que satisface la ecuación diferencial,

$$f^{'}(x) = f(x),$$

para todo x real y que satisface también la condición inicial $f(0) = C$. Esta función viene dada por la fórmula $f(x) = Ce^x$.

Ejercicio 155. Supongamos que $P(x)$ es continua en un intervalo abierto I. Elijamos un punto $a \in I$ y sea b un número real cualquiera. Probar que existe una, y sólo una, función $y = f(x)$ que satisface el problema de valores iniciales,

$$y^{'} + P(x)y = 0,$$

con $f(a) = b$, en el intervalo I. Esta función viene dada por la fórmula

$$f(x) = be^{-A(x)},$$

donde $A(x) = \int_a^x P(t)dt$.

Ejercicio 156. Supongamos que P y Q son continuas en un intervalo abierto I. Elijamos un punto $a \in I$ y sea b cualquier número real. Probar que existe una, y sólo una, función $y = f(x)$ que satisface el problema de valores iniciales,

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

con $f(a) = b$ en el intervalo I. Esta función viene dada por la fórmula

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}dt,$$

en donde $A(x) = \int_a^x P(t)dt$.

Ejercicio 157. En cada uno de los ejercicios que siguen resolver el problema de valores iniciales en el intervalo que se indica.

a) $y' - 3y = e^{2x}$ en $(-\infty, +\infty)$, con $y = 0$ cuando $x = 0$.

b) $xy' - 2y = x^5$ en $(0, +\infty)$, con $y = 1$ cuando $x = 1$.

c) $y' + y\ tan(x) = sen(2x)$ en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, con $y = 2$ cuando $x = 0$.

d) $y' + xy = x^3$ en $(-\infty, +\infty)$, con $y = 0$ cuando $x = 0$.

Ejercicio 158. Hallar todas las soluciones de

$$y' sen(x) + y\ cos(x) = 1,$$

en el intervalo $(0, \pi)$. Demostrar que exactamente una de estas soluciones tiene límite finito cuando $x \to 0$, y otra lo tiene finito cuando $x \to \pi$.

Ejercicio 159. Sean b un número real y dos funciones u_1 y u_2 en $(-\infty, +\infty)$ definidas como sigue:

a) Si $b = 0$, $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$.

b) Si $b < 0$, sea $b = -k^2$ y definimos $u_1(x) = e^{kx}, u_2(x) = e^{-kx}$.

c) Si $b > 0$, sea $b = k^2$ y definimos $u_1(x) = cos(kx)$, $u_2(x) = sen(kx)$.

Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial $y'' + by = 0$ en $(-\infty, +\infty)$ tiene la forma

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x),$$

siendo c_1 y c_2 constantes.

Sugerencia: Pueden utilizar el siguiente resultado sobre unicidad. Supongamos que dos funciones f y g que satisfacen la ecuación diferencial $y'' + by = 0$ en $(-\infty, +\infty)$. Supongamos también que satisfacen las condiciones iniciales

$$f(0) = g(0), f'(0) = g'(0).$$

Entonces es $f(x) = g(x)$ para todo x.

Ejercicio 160. Sea $d = a^2 - 4b$ el discriminante de la ecuación diferencial lineal

$$y^{''} + ay^{'} + by = 0.$$

Demostrar que toda solución de esta ecuación en $(-\infty, +\infty)$ tiene la forma

$$y = e^{-ax/2}(c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)),$$

en donde c_1 y c_2 son constantes, y las funciones u_1 y u_2 se determinan según el signo algebraico del discriminante del modo siguiente:

a) Si $d = 0$, $u_1(x) = 1$ y $u_2(x) = x$.

b) Si $d > 0$, $u_1(x) = e^{kx}$, $u_2(x) = e^{-kx}$, siendo $k = \frac{\sqrt{d}}{2}$.

c) Si $d < 0$, $u_1(x) = cos(kx)$, y, $u_2(x) = sen(kx)$, siendo $k = \frac{\sqrt{-d}}{2}$.

Ejercicio 161. Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales en $(-\infty, \infty)$.

i) $y^{''} - 4y = 0$.

ii) $y^{''} + 4y = 0$.

iii) $y^{''} - 4y^{'} = 0$.

iv) $y^{''} + 4y^{'} = 0$.

v) $y^{''} - 2y^{'} + 3y = 0$.

vi) $y^{''} + 2y^{'} - 3y = 0$.

vii) $y^{''} - 2y^{'} + 2y = 0$.

viii) $y^{''} - 2y^{'} + 5y = 0$.

ix) $y^{''} + 2y^{'} + y = 0$.

Ejercicio 162. Para $b > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ definimos T en $C[0, b]$ por

$$Tf(x) = a + \int_0^x f(t)xe^{-xt}dt.$$

Probar que T es una contracción. Demostrar que existe una única solución $f \in C[0, \infty)$ de la ecuación integral

$$f(x) = a + \int_0^x f(t)xe^{-xt}dt.$$

Ejercicio 163. Considerar la ecuación diferencial

$$f^{'}(x) = xf(x) + 1,$$

y $f(0) = 0$. Usar el teorema global de Picard para probar que existe una única solución en $[-b, b]$ para todo $b < \infty$. Por lo tanto existe una única solución en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 164. Supongamos que φ es una función C^∞ en $[a,b]\times\mathbb{R}$, y

$$Tf(x) = c + \int_a^x \varphi(t, f(t))dt.$$

Probar por inducción que si $f_0 \in C[a,b]$, entonces $T^n f_0$ tiene n derivadas continuas. Concluír que un punto fijo $f = Tf$ deber ser una función C^∞.

Ejercicio 165. Consideremos el problema (con $n = 1$)

$$(P_v)\ \begin{cases} y' = y^2 & (x,y) \in [0,2]\times\mathbb{R} \\ \\ y(0) = 1 \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Probar que $F(x,y) = y^2$ es continua en $[0,2]\times\mathbb{R}$ pero demostrar que f no es (globalmente) Lipschitz en la segunda variable en $[0,2]\times\mathbb{R}$. Ahora considerar la restricción $F : [0,1]\times \overline{B}_r(1) \to \mathbb{R}$, donde $\overline{B}_r(1)$ denota la bola cerrada centrada en 1 (que es el valor requerido para la solución $y(0) = 1$) y de radio $r > 0$ (en nuestro caso, $\overline{B}_r(1) = [1-r, 1+r] \subset \mathbb{R}$). Probar que la restricción $F : [0,1]\times\overline{B}_r(1) \to \mathbb{R}$ resulta Lipschitz.